Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Stäckel, Paul** (1862 – 1919)

Titel: **Die Lückenzahlen r-ter Stufe und die Darstellung der geraden Zahlen als Summe und Differenzen ungerader Primzahlen. III. Teil**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1918, 14

In den beiden vorhergehenden Teilen (Jahrgang 1917, Abh. 15 und Jahrgang 1918, Abh. 2) waren asymptotische Ausdrücke aufgestellt worden: erstens für die Anzahlen der Primzahlfolgen, die gegebene Differenzen aufweisen, zweitens für die Anzahlen der mehrfachen Darstellungen der geraden Zahlen als Summen mittels Primzahlfolgen gegebener symmetrischer Differenzen, und zwar erschienen diese Ausdrücke als Produkte je einer Wachstumsfunktion, die wesentlich durch die Gliederzahl der auftretenden Differenzenfolgen bedingt war, und einer von der arithmetischen Natur der Differenzenfolgen abhängenden Schwankungsfunktion. Während sich bei den früheren Untersuchungen ergeben hatte, daß die Wachstumsfunktionen für die Anzahlen von Differenzenfolgen zugleich die Wachstumsfunktionen für gewisse Anzahlen von Darstellungen als Summen sind, wird jetzt auch der Zusammenhang zwischen den Schwankungsfunktionen der beiden Arten aufgedeckt. Dies ist um so wichtiger, als für die Schwankungsfunktionen der ersten Art eine Reihe neuer Eigenschaften hergeleitet wird; denn es ergeben sich daraus Mittel, auch die Schwankungsfunktionen der zweiten Art in einfacher Weise herzustellen.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1918, S. XXXV)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1918. 14. Abhandlung

Die Lückenzahlen r-ter Stufe und die Darstellung der geraden Zahlen als Summen und Differenzen ungerader Primzahlen

III. TEIL

Von
PAUL STÄCKEL
in Heidelberg

Mit Beiträgen von W. WEINREICH
in Frankfurt a. M.

Eingegangen am 19. Juli 1918

Heidelberg 1918
Carl Winters Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 1450

§ 18

Eigenschaften der zulässigen und der beständigen Folgen

Bedeutet p eine Primzahl, so ist die Kongruenz $Ax \equiv B \pmod{p}$ stets lösbar, wenn A inkongruent p ist, und besitzt eine und nur eine Hauptlösung im Bereich der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, p-1$. Hat man n verschiedene Primzahlen $q_1, q_2, \ldots, q_n$, so besitzen die n gleichzeitigen Kongruenzen $x \equiv a_\nu \pmod{q_\nu}$ für $\nu = 1, 2, \ldots, n$, in denen die Zahlen a_ν immer dem Bereich von 0 bis $q_\nu - 1$ angehören mögen, stets eine und nur eine Hauptlösung im Bereich der Zahlen von 1 bis $Q = q_1 \cdot q_2 \cdot \cdots \cdot q_n$[1]. Jede Zahl dieses Bereichs läßt sich nämlich auf eine einzige Art in der Form $b_1 + b_2 q_1 + b_3 q_1 q_2 + \cdots + b_n q_1 q_2 \cdots q_{n-1}$ darstellen, wenn die Koeffizienten b_ν den Bereichen $0, 1, 2, \ldots, q_\nu - 1$ entnommen werden, und damit die n Kongruenzen $x \equiv a_\nu \pmod{q_\nu}$ erfüllt sind, muß der Reihe nach

$$b_1 \equiv a_1 \pmod{q_1},\ b_1 + b_2 q_1 \equiv a_2 \pmod{q_2},\ \ldots$$

$$\ldots,\ b_1 + b_2 q_1 + b_3 q_1 q_2 + \cdots + b_n q_1 q_2 \cdots q_{n-1} \equiv a_n \pmod{q_n}$$

sein. Hieraus folgt, daß umgekehrt jeder Zahl des Bereichs $1, 2, \ldots, Q$ ein einziges Restsystem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bezüglich der Primmoduln $q_1, q_2, \ldots, q_n$ zugeordnet ist. Damit eine dieser Zahlen den Teiler q_ν besitzt, ist es notwendig und hinreichend, daß der zugehörige Rest a_ν gleich Null ist. Im Bereich der Zahlen von 1 bis Q gibt es daher $(q_1 - 1)(q_2 - 1) \cdots (q_n - 1)$ Zahlen, die durch keine der n Primzahlen $q_1, q_2, \ldots, q_n$ teilbar sind, und ihnen sind diejenigen $(q_1 - 1)(q_2 - 1) \cdots (q_n - 1)$ Restsysteme zugeordnet, bei denen keiner der Reste den Wert Null hat.

Betrachtet man im besonderen die $r+1$ ersten Primzahlen $p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5, \ldots, p_r$, so folgt, daß jede Lückenzahl r-ter

[1] L. Euler, Solutio problematis arithmetici de inveniendo numero, qui per datos numeros divisus relinquat data residua, Comment. Petrop. 7 (1734/5), 1740, S. 46; Opera omnia, ser. I, vol. 2, S. 18.

Stufe des Hauptbereichs durch das Restsystem $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_r$ charakterisiert wird, das sich ergibt, wenn man der Reihe nach die Reste gegen $2, 3, 5, \ldots, p_r$ bildet.

Zu einer k-gliedrigen Differenzenfolge (§ 10) gehörten die Teilsummen

$$(85) \qquad 2\sigma_\varkappa = 2\delta_1 + 2\delta_2 + \cdots + 2\delta_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k).$$

Wird noch $2\sigma_0 = 0$ gesetzt, so gelten die Gleichungen

$$(171) \qquad 2\delta_\varkappa = 2\sigma_\varkappa - 2\sigma_{\varkappa-1},$$

und eine $(k+1)$-gliedrige Lückenzahlfolge r-ter Stufe mit den Differenzen $2\delta_1, \ldots, 2\delta_k$ erscheint in der Form $v_r + 2\sigma_\varkappa$ $(\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, k)$. Die in § 10 angestellten Überlegungen führen zu dem

LEHRSATZ I. *Eine k-gliedrige Folge $2\delta_1, \ldots, 2\delta_k$ ist dann und nur dann als Differenzenfolge r-ter Stufe zulässig, wenn die Reste der $k+1$ Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ bei keiner der r Primzahlen $3, 5, \ldots, p_r$ ein vollständiges Restsystem ausmachen.*

Beweis. Die Bedingung ist notwendig. Bilden nämlich die Reste der Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ ein vollständiges Restsystem gegen eine der Primzahlen p_ϱ, so gilt dasselbe für die $k+1$ Zahlen $v_r + 2\sigma_\varkappa$, mithin ist mindestens eine von ihnen durch p_ϱ teilbar. Die Bedingung ist aber auch hinreichend. Fehlt nämlich unter den Resten gegen die Primzahlen p_ϱ je eine Zahl t_ϱ, so gehört, weil t_ϱ notwendig von Null verschieden ist, zu dem charakteristischen Restsystem $1, p_1 - t_1, p_2 - t_2, \ldots, p_r - t_r$ eine bestimmte Lückenzahl v_r des Hauptabschnitts, und da die Zahlen $v_r + 2\sigma_\varkappa$ gegen p_ϱ dieselben Reste lassen wie die Zahlen $2\sigma_\varkappa - t_\varrho$, so ist keine von ihnen durch p_ϱ teilbar.

Aus dem Lehrsatz I ergibt sich für beständige Folgen ein bereits in § 10 ausgesprochener Satz, dem hier die folgende einfachere Form gegeben werde:

LEHRSATZ II. *Wird die Zahl R so gewählt, daß $p_R \leq k+1 < p_{R+1}$ ist, so ist die k-gliedrige Folge $2\delta_1, \ldots, 2\delta_k$ dann und nur dann eine beständige Differenzenfolge, wenn die Reste der Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ bei kei-*

ner der Primzahlen $3, 5, \ldots, p_R$ ein vollständiges Restsystem ausmachen.

Beweis. Die Bedingung ist für die Zulässigkeit auf allen Stufen $r \leq R$ notwendig und hinreichend. Für Stufen, bei denen $r > R$ ist, wird aber die Anzahl der Reste, $k+1$, von selbst kleiner als p_r [1].

Zwei Folgen von je $k+1$ geraden Zahlen, bei denen entsprechende Glieder sich um Vielfache von $2P_r$ unterscheiden, haben gegen die Primzahlen $3, 5, \ldots, p_r$ dieselben Reste. Mithin entstehen sämtliche auf der r-ten Stufe zulässige k-gliedrige Differenzenfolgen aus einer endlichen Anzahl von Grundfolgen, bei denen die Zahlen $2\delta_1, \ldots, 2\delta_k$ der Reihe $2, 4, 6, \ldots, 2P_r$ angehören. Die Folgen, die sich daraus durch Hinzufügen von Vielfachen der Zahl $2P_r$ ergeben, sollen abgeleitete Folgen heißen.

Die Anzahl der verschiedenen Reste der $k+1$ Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ gegen p_ϱ werde mit $V(p_\varrho)$ bezeichnet. Der kleinste Wert, den $V(p_\varrho)$ haben kann, ist Eins; der gemeinsame Rest der Teilsummen und daher auch der Differenzen ist dann Null. Haben umgekehrt alle Differenzen den Teiler p_ϱ, so ist $V(p_\varrho) = 1$. Diese Gleichung gilt demnach für alle ungeraden Primzahlen, die in dem größten gemeinsamen Teiler der k Differenzen $2\delta_1, \ldots, 2\delta_k$ aufgehen, und nur für diese. Solchen Primzahlen soll in bezug auf die betrachtete Differenzenfolge Minimalcharakter zugeschrieben werden.

Der größte Wert, den $V(p_\varrho)$ haben kann, ist $p_\varrho - 1$; er kann nur erreicht werden, falls $\varrho \leq R+1$ ist. Die Primzahl p_ϱ habe dann in bezug auf die betrachtete Differenzenfolge Maximalcharakter. Jetzt gibt es nur einen Nichtrest t_ϱ, sodaß die Lage der zugehörigen Lückenzahlen gegen die Vielfachen von p_ϱ eindeutig bestimmt ist.

Im allgemeinen liegt $V(p_\varrho)$ zwischen 1 und $p_\varrho - 1$, und zwar ist von einer gewissen Stufenzahl a ab immer $V(p_\varrho) = k+1$. Wenn nämlich die Teilsummen $2\sigma_\varkappa$ und $2\sigma_\lambda$ $(\varkappa > \lambda)$ gegen p_ϱ gleiche Reste liefern, so ist $2\sigma_\varkappa - 2\sigma_\lambda = 2w_{\varkappa\lambda}$ durch p_ϱ teilbar, folglich finden sich gleiche Reste nur bei den Primzahlen, die als Teiler in den $\frac{1}{2}k(k+1)$ Differenzen $2w_{\varkappa\lambda}$ enthalten sind. Die hierdurch erklärte Zahl a fällt zusammen mit der in § 11 (Teil II, S. 16) auftretenden Zahl a.

[1] Die hier mit R bezeichnete Zahl ist in § 11 (Teil II, S. 16) k genannt worden.

Weil $p_a - 1 \leq k+1$ ist, muß $a > R$, und weil $2\sigma_k$ die größte der Zahlen $2w_{\varkappa\lambda}$ ist, muß $p_a \leq \sigma_k$ sein. Mithin liegt p_a zwischen p_{R+1} und σ_k, die Grenzen eingeschlossen.

Beispiel. Zur Erläuterung soll die Aufgabe behandelt werden, eine Differenzenreihe von möglichst wenigen Gliedern aufzustellen, für die 5 und 11 Maximalcharakter haben, während dies für 3 und 7 nicht gilt.

Damit 3 nicht Maximalcharakter hat, darf bei den Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ nur der Rest 0 gegen 3 auftreten, mithin ist $2\sigma_\varkappa = 6\sigma'_\varkappa$. Gegen 5 müssen 4 Reste auftreten; man wird dafür die kleinsten 0, 1, 2, 3 wählen. Dann sind die Teilsummen den 4 arithmetischen Reihen $30\sigma''_\varkappa + 0, 6, 12, 18$ mit der Maßgabe zu entnehmen, daß aus jeder Reihe mindestens eine Teilsumme stammt. Gegen die Primzahl 7 dürfen höchstens 5 Reste auftreten. Nun lassen sich die Teilsummen darstellen in der Form $210\sigma'''_\varkappa + 30\tau + 0, 6, 12, 18$, wo $\tau = 0, 1, 2, \ldots, 6$ zu setzen ist. Bildet man die Reste gegen 7, so kommen die Reste 1 und 3 am spätesten vor, und deshalb sollen sie ausgeschlossen werden. Damit 11 Maximalcharakter hat, muß man mindestens 10 Teilsummen haben, und diese müssen lauter verschiedene Reste gegen 11 liefern. Setzt man, um möglichst kleine Zahlen zu erhalten, versuchsweise $\sigma'''_\varkappa = 0$, so ergibt sich, daß die 10 ersten Zahlen der verlangten Form

$$0, 6, 12, 18, 30, 42, 48, 60, 90, 102$$

bereits gegen 11 alle Reste außer 10 liefern. Folglich hat man in ihnen die gewünschte Folge von Teilsummen gefunden. Die zugehörige Differenzenfolge wird

$$(6, 6, 6, 12, 12, 6, 12, 30, 12).$$

Die bei dem Beispiel angestellten Betrachtungen lassen sich verallgemeinern und führen zu dem Satz, daß es stets möglich ist, Differenzenfolgen herzustellen, für die eine Reihe von Primzahlen Maximalcharakter hat, während einer anderen Reihe von Primzahlen dieser Charakter nicht zukommt.

§ 19

Symmetrische Differenzenfolgen

Um Lückenzahlfolgen r-ter Stufe $(v_r + 2\sigma_\varkappa)$ zu untersuchen, deren Differenzen symmetrisch sind, ist es oft zweckmäßig, deren Mitte

m_r zu benutzen, also die Zahl $v_r + \sigma_k$; die Mitte braucht der Folge nicht anzugehören. Die Fälle k gerade und k ungerade sind getrennt zu behandeln.

I. Es sei $k = 2l$. Dann ist $\sigma_{2l} = 2\sigma_l$. Folglich bildet die Mitte ein Glied der Lückenzahlfolge, und diese erscheint in der Form

$$m_r - 2\sigma'_l, \ldots, m_r - 2\sigma'_1, m_r, m_r + 2\sigma'_1, \ldots, m_r + 2\sigma'_l;$$

dabei hat man

$$\sigma'_\lambda = \delta_l + \delta_{l-1} + \cdots + \delta_{l-\lambda+1} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l) \tag{172}$$

zu setzen. An die Stelle des Lehrsatzes I tritt jetzt der

Lehrsatz III. *Eine $2l$-gliedrige symmetrische Folge $2\delta_1, \ldots, 2\delta_1$ ist dann und nur dann als Differenzenfolge r-ter Stufe zulässig, wenn die Reste der $2l+1$ Zahlen $0, \pm 2\sigma'_1, \ldots, \pm 2\sigma'_l$ bei keiner der r Primzahlen $3, 5, \ldots, p_r$ ein vollständiges Restsystem ausmachen.*

Weiter gilt der

Lehrsatz IV. *Bei einer auf der r-ten Stufe zulässigen symmetrischen Differenzenfolge mit gerader Gliederzahl hat keine der Primzahlen $3, 5, \ldots, p_r$ Maximalcharakter.*

Beweis. Zwei Zahlen $+2\sigma'_\lambda$ und $-2\sigma'_\lambda$ haben nur dann gegen p_ϱ denselben Rest, wenn σ'_λ durch p_ϱ teilbar ist, nämlich den Rest Null. Da dieser schon bei der ersten Teilsumme $2\sigma_0 = 0$ auftrat, ist so $V(p_\varrho)$ notwendig ungerade, kann also nicht gleich der geraden Zahl $p_\varrho - 1$ sein.

II. Es sei $k = 2l - 1$. Hier ist die Mitte der Folge kein Glied der Lückenzahlfolge, und diese erscheint in der Form

$$m_r - (\delta_l + 2\sigma_l), m_r - (\delta_l + 2\sigma'_{l-1}), \ldots, m_r - (\delta_l + 2\sigma'_2), m_r - \delta_l,$$
$$m_r + \delta_l, m_r + (\delta_l + 2\sigma'_2), \ldots, m_r + (\delta_l + 2\sigma'_{l-1}), m_r + (\delta_l + 2\sigma'_l);$$

dabei hat man

$$\sigma'_\lambda = \delta_{l-1} + \delta_{l-2} + \cdots + \delta_{l-\lambda+1} \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots, l) \tag{173}$$

zu setzen. Wird noch $2\sigma_1'=0$ eingeführt, so ist der Lehrsatz I zu ersetzen durch den

LEHRSATZ V. Eine $(2l-1)$-gliedrige symmetrische Folge $2\delta_1, \ldots, 2\delta_1$ ist dann und nur dann als Differenzenfolge r-ter Stufe zulässig, wenn die Reste der $2l$ Zahlen $\pm(\delta_l+2\sigma_\lambda')$ bei keiner der r Primzahlen $3, 5, \ldots, p_r$ ein vollständiges Restsystem ausmachen.

Die Anzahl $V(p_\varrho)$ kann hier gerade oder ungerade sein, und es ist daher nicht ausgeschlossen, daß es Primzahlen von Maximalcharakter gibt. Für solche Primzahlen gilt der

LEHRSATZ VI. Wenn eine Primzahl für eine symmetrische Differenzenfolge Maximalcharakter trägt, so sind die Mitten der zugehörigen Lückenzahlfolgen durch sie teilbar.

Beweis. Hat p_ϱ Maximalcharakter, so sind die $p_\varrho-1$ Reste der $2l$ Zahlen $\pm(\delta_l+2\sigma_\lambda')$ die Zahlen $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\frac{1}{2}(p_\varrho-1)$, und damit keine der Zahlen $m_r\pm(\delta_l+2\sigma_\lambda')$ den Teiler p_ϱ hat, muß m_r durch p_ϱ teilbar sein.

Handelt es sich um die mehrfache Darstellung der geraden Zahlen als Summen mittels derjenigen Lückenzahlfolgen r-ter Stufe, denen eine gegebene symmetrische $(2l-1)$-gliedrige Differenzenfolge zukommt, so hat man (§ 16, Teil II, S. 38) die entsprechenden Glieder von zwei Folgen $m_r\mp(\delta_l+2\sigma_\lambda')$ und $m_r'\pm(\delta_l+2\sigma_\lambda')$ zu addieren und erhält als gemeinsamen Wert der Summen m_r+m_r'. Hat also die Primzahl p_ϱ Maximalcharakter, so gestatten nur solche gerade Zahlen die verlangte Darstellung, die den Teiler p_ϱ besitzen. Wenn daher den Primzahlen $q, q', q'', \ldots$ Maximalcharakter zukommt, so sind nur die durch das Produkt $Q_r=q\cdot q'\cdot q''\cdot\ldots$ teilbaren geraden Zahlen darstellbar. Läßt man die Stufenzahl wachsen, so behält Q_r von der R-ten Stufe ab einen festen Wert, der mit Q bezeichnet werden möge.

Bei den späteren Untersuchungen wird eine besondere Art von beständigen symmetrischen Differenzenfolgen eine Rolle spielen, bei denen nämlich sämtliche Differenzen denselben Wert $2a$ haben. Dann ist in der Bezeichnung von § 18 $2\sigma_\varkappa=2\varkappa a$, und diese $k+1$ Vielfachen von $2a$ bilden ein vollständiges Restsystem für jede Primzahl $p_r\leq k+1$, außer wenn a durch p_r teilbar ist. Folglich muß nach dem Lehrsatz II a alle Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_R$ zu Teilern haben, und es wird $2a$ gleich einem Vielfachen von $2P_R$.

Das heißt, eine Differenzenfolge, deren Glieder alle denselben Wert $2\nu P_R$ haben, ist beständig, solange ihre Gliederzahl k kleiner als $p_{R+1}-1$ bleibt. Es ist also für $2P_R = 6, 30, 120$ der Reihe nach $k \leqq 3, 5, 9$.

§ 20

Erzeugung beständiger Folgen durch Zusammensetzung

Während die Untersuchungen sich bis jetzt im Gebiet der positiven Lücken- und Primzahlen bewegten, sollen nunmehr auch negative Zahlen herangezogen werden, eine Erweiterung, auf die schon in § 2 (Teil I, S. 9) hingewiesen wurde.

Wenn man irgendeine steigende Folge von positiven Primzahlen nimmt, bei der die Anzahl der Glieder kleiner ist als das erste Glied, so ist nach § 10 (Teil II, S. 15) die zugehörige Differenzenfolge beständig. Ist bei einer steigenden Folge von $k+1$ negativen und positiven Primzahlen der kleinste der absoluten Beträge p_{h+1}, so ist die zugehörige Differenzenfolge sicher beständig, falls $h \geqq R$ ist. Weil die Lückenzahlen r-ter Stufe alle Primzahlen in sich schließen, die nicht kleiner als p_{r+1} sind, so kann eine unbeständige Differenzenfolge unter den Primzahlen nur als singuläre Folge am Anfange der Zahlenreihe einmal oder mehrere Male auftreten (vgl. Teil II, S. 9). Dagegen gilt wahrscheinlich der Satz, daß jede beständige Differenzenfolge unter den Primzahlen unbegrenzt oft auftritt. Der einfachste Fall ist die alte Vermutung, daß es unbegrenzt viele Primzahlzwillinge gebe. Daß es noch jenseits der hundertsten Million Primzahlzwillinge gibt, folgt aus der von Davis durchgeführten Bestimmung der ersten 99 Primzahlen, die größer als 100000000 sind[1]. Unter dieser befinden sich nämlich sogar 10 Zwillinge; der größte ist 100001687, 100001689.

Die Heranziehung negativer Primzahlen hat den Vorteil, daß das Gewicht der mit ihrer Hilfe erhaltenen beständigen Folgen bei derselben Gliederzahl kleiner ausfallen kann, als wenn man sich auf positive Primzahlen beschränkt; man wird das leicht durch Beispiele bestätigen.

[1] N. W. Davis, Les nombres premiers de 100000001 à 100001699, Journal de math. (2) 11 (1866), S. 188.

Es gibt Mittel, um aus einer bekannten beständigen Folge neue Folgen dieser Art herzuleiten. Zunächst gilt der

LEHRSATZ VII. Schreibt man die Glieder einer unsymmetrischen beständigen Folge in umgekehrter Reihenfolge, so entsteht wieder eine beständige Folge.

Erster Beweis. Die Teilsummen der umgekehrten Folge sind $2\tau_\varkappa = 2\sigma_k - 2\sigma_{k-\varkappa}$, sie haben also gegen p_ϱ ebenfalls $V(p_\varrho)$ verschiedene Reste.

Zweiter Beweis. Liegt die letzte Zahl der im Hauptabschnitt beginnenden Lückenzahlfolge $(v_r + 2\sigma_\varkappa)$, also $v_r + 2\sigma_k$, im Abschnitt zwischen $2(m-1)P_r$ und $2mP_r$, so sind die Zahlen

$$(174)\quad 2mP_r - (v_r + 2\sigma_{k-\varkappa}) = (2mP_r - v_r - 2\sigma_k) + (2\sigma_k - 2\sigma_{k-\varkappa}) \quad (\varkappa = 0, 1, \ldots, k)$$

Lückenzahlen r-ter Stufe und bilden eine im Hauptabschnitt beginnende Lückenzahlfolge mit den umgekehrten Differenzen.

Zur Erzeugung neuer beständiger Differenzenfolgen führt ferner der von WEINREICH aufgestellte

LEHRSATZ VIII. Sind $2\sigma_0, 2\sigma_1, \ldots, 2\sigma_k$ und $2\tau_0, 2\tau_1, \ldots, 2\tau_l$ die Teilsummen von zwei beständigen Differenzenfolgen, so lassen sich beliebig viele Zahlen $2Z$ so bestimmen, daß aus den $k+l+2$ Zahlen

$$2\sigma_0, 2\sigma_1, \ldots, 2\sigma_k, 2Z + 2\tau_0, 2Z + 2\tau_1, \ldots, 2Z + 2\tau_l,$$

wenn man sie der Größe nach ordnet und gleiche Zahlen nur einmal hinschreibt, die Teilsummen einer beständigen Folge hervorgehen (Zusammensetzung von zwei beständigen Folgen).

Beweis. Bei den Teilsummen $2\sigma_\varkappa$ fehle unter den Resten gegen p_ϱ die Zahl t_ϱ, bei den Teilsummen $2\tau_\lambda$ die Zahl u_ϱ. Bestimmt man $2Z$ so, daß für alle Primzahlen $p_\varrho \leq k+l+2$ die Kongruenzen

$$(175)\qquad 2Z \equiv t_\varrho - u_\varrho \pmod{p_\varrho}$$

erfüllt sind, so fehlt bei den Teilsummen der zusammengesetzten Folge der Rest t_ϱ, und diese Folge ist nach Lehrsatz II beständig.

Wenn für alle in Betracht kommenden Werte von ϱ unter den Nichtresten t_ϱ und u_ϱ ein Paar gleicher Zahlen vorkommt, so gehört zu den Werten von $2Z$ auch der Wert Null. Das gilt im besonderen für die Zusammensetzung einer beständigen Differenzenfolge mit sich selbst. Hier führt jedoch der Wert Null zur ursprünglichen Folge zurück. Der kleinste brauchbare Wert von $2Z$ hat in diesem Falle die Form $2\gamma Q$, wo γ eine ganze Zahl und Q das Produkt der Primzahlen bedeutet, denen für die Folge Maximalcharakter zukommt; denn bei ihnen ist man gezwungen, in den Kongruenzen (175) $t_\varrho = u_\varrho$ zu nehmen.

Beispiel I. Die einfachste beständige Differenzenfolge ist die Folge (2). Hier hat 3 Maximalcharakter, und wenn man die Folge mit sich selbst zusammensetzt, so wird $2Z = 6\gamma$. Der kleinste Wert 6 führt schon zu der beständigen Folge $(2, 4, 2)$. Da für sie 3 und 5 Maximalcharakter tragen, wird bei der Zusammensetzung mit sich selbst $2Z = 30\gamma$. Der kleinste Wert 30 führt zu der beständigen Folge $(2, 4, 2, 22, 2, 4, 2)$; vgl. Teil II, S. 48. Weil jetzt auch 7 Maximalcharakter hat, wird bei wiederholter Zusammensetzung mit sich selbst $2Z = 210\gamma$. Jetzt liefert für $\gamma = 1$, also $2Z = 210$, die Primzahl 11 ein volles Restsystem, dagegen führt die Annahme $\gamma = 2$, also $2Z = 420$, zu der beständigen Folge

$$(2, 4, 2, 22, 2, 4, 2, 382, 2, 4, 2, 22, 2, 4, 2).$$

Auf diese Art kann man fortfahren. Mithin gibt es beständige Folgen, deren (ungerade) Gliederzahl größer ist als eine gegebene, beliebig große Zahl, und bei denen alle Glieder ungerader Ordnung gleich Zwei sind.

Vacca[1] hat bemerkt, daß die acht unmittelbar aufeinander folgenden Primzahlen

$$9419, 21, 31, 33, 37, 39, 61, 63$$

vier Paare der Differenz 2 bilden, und vermutet, daß es in der Reihe der Primzahlen Abschnitte gebe, bei denen beliebig viele Primzahlzwillinge unmittelbar aufeinanderfolgen, also nicht durch weitere Primzahlen getrennt sind. Hiergegen macht Ripert[2]

---

[1] G. Vacca, L'Intermédiaire des mathématiciens, 10 (1903), S. 70.
[2] L. Ripert, L'Intermédiaire des mathématiciens, 10 (1903), S. 220.

geltend, daß er unter den Primzahlen bis 200000 nur noch die beiden achtgliedrigen Abschnitte

62969, 71; 81, 83; 87, 89; 63029, 31

und

72221, 23; 27, 29; 51, 53; 69, 71

gefunden habe, jedoch keine zehn- oder mehrgliedrigen Folgen der verlangten Art. Es sei daher wenig wahrscheinlich, daß die Anzahl der Glieder beliebig groß werden dürfe. Man wird indessen einer nur bis 200000 durchgeführten Zählung keine erhebliche Bedeutung beimessen und vielmehr auf Grund der Ergebnisse des § 15 (Teil II, S. 38) darauf vertrauen dürfen, daß es sogar unbegrenzt viele Abschnitte in der Reihe der Primzahlen gibt, denen die soeben betrachteten beständigen Folgen als Differenzenfolgen zukommen.

Unter Umständen wird man freilich in der Reihe der Primzahlen recht weit gehen müssen, ehe man zur ersten Primzahlfolge der verlangten Art gelangt. Ist diese zum Beispiel achtgliedrig, so wird nach § 15 die Wachstumsfunktion

$$A_7 \cdot \frac{\pi^8(n)}{n^7}.$$

Nun hat man für $n = 3000000$ nach BERTHELSEN[1] $\pi(n) = 216816$, und da $A_7 = 148{,}88$ ist, so wird die Wachstumsfunktion für $n = 3000000$ erst gleich 0,33. Für $n = 100000000$ ist, ebenfalls nach BERTHELSEN, $\pi(n) = 5761455$. Als Wert der Wachstumsfunktion ergibt sich nur 1,81.

Beispiel II. Die nächsteinfache beständige Folge (4) ergibt durch Zusammensetzung mit sich selbst für $2Z = 6$ die beständige Folge $(4, 2, 4)$. Da für diese 5 nicht Maximalcharakter hat, darf man es mit $2Z = 6$ versuchen und findet die beständige Folge $(4, 2, 4, 2, 4)$. Für sie haben 5 und 7 Maximalcharakter und $2Z = 210$ führt zu der beständigen Folge

$$(4, 2, 4, 2, 4, 194, 4, 2, 4, 2, 4).$$

[1] J.-P. GRAM, Rapport sur quelques calculs entrepris par M. Berthelsen et concernant les nombres premiers, Acta math. 17 (1893), S. 313.

Auf diese Art kann man weitergehen und erkennt, daß es beständige Folgen gibt, deren (ungerade) Gliederzahl größer als eine gegebene, beliebig große Zahl ist und bei denen alle Glieder ungerader Ordnung gleich Vier sind. Es ist klar, daß der Satz sich von 2 und 4 auf jede gerade Zahl ausdehnen läßt.

Beispiel III. Wenn man eine beständige Folge mit der umgekehrten Folge zusammensetzt, so erhält man nach den Lehrsätzen VII und VIII wieder eine beständige Folge, und zwar gelangt man so zu symmetrischen Folgen. Zum Beispiel ist die Folge $(10, 8, 6, 4, 2)$ mit den Teilsummen $(0, 10, 18, 24, 28, 30)$ beständig; die umgekehrte Folge $(2, 4, 6, 8, 10)$ hat die Teilsummen $(0, 2, 6, 12, 20, 30)$. Weil jetzt $k+l+2=12$ ist, hat man die Primzahlen $3, 5, 7, 11$ bei den Kongruenzen (175) zu benutzen. Man kann für die Nichtreste nehmen:

p	3	5	7	11
t	2	1	1	9
u	1	3	1	3
$t-u$	1	3	0	6

Dann wird $2Z=28+2310\cdot\gamma$. Der kleinste zulässige Wert ist 28. Mithin sind die neuen Teilsummen $(0, 10, 18, 24, 28, 30, 34, 40, 48, 58)$ mit der Differenzenfolge $(10, 8, 6, 4, 2, 4, 6, 8, 10)$; daß diese beständig ist, ergibt sich auch aus einem allgemeineren, in § 10 (Teil II, S. 15) bewiesenen Satze.

§ 21

Anwendungen auf Lücken- und Primzahlfolgen mit gegebenen Differenzen

In § 11 wurde die Anzahl der Lückenzahlfolgen r-ter Stufe untersucht, die gegebene Differenzen $2\delta_1, \ldots, 2\delta_k$ aufweisen und mit einer Lückenzahl des Hauptabschnitts beginnen. Die dort aufgestellten Formeln lassen sich mit Hilfe der Sätze der §§ 18, 19 und 20 vereinfachen und vervollständigen. Dabei wird die Wichtigkeit der Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ in ein noch helleres Licht treten, und es sollen daher fortab diese Teilsummen statt der Differenzen $(2\delta_\varkappa)$ als Zeiger bei den H-Funktionen benutzt werden. Als Zeichen für die Anzahl der Lückenzahlfolgen r-ter Stufe, deren Differenzen die Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ haben und die mit einer Lückenzahl des Abschnitts von n_1 bis n_2 beginnen, diene also $H_r^{(2\sigma_\varkappa)}(n_2; n_1)$. Für Primzahlfolgen sei die entsprechende Anzahl $H^{(2\sigma_\varkappa)}(n_2; n_1)$. Endlich möge zur Abkürzung

$$(176) \qquad H_r^{(2\sigma_\varkappa)}(2P_r; 1) = h_r(2\sigma_\varkappa)$$

gesetzt werden.

Die Kenntnis der Funktion $h_r(2\sigma_\varkappa)$ genügt, um für $H_r^{(2\sigma_\varkappa)}(n_2; n_1)$ einen asymptotischen Ausdruck zu gewinnen; denn dieselbe Überlegung, die in § 2 (Teil I, S. 14) für $2n = 2P_r x + 2u_r$ zur Formel

$$(10) \qquad G_r(2n) \sim \frac{2n}{P_r} \cdot g_r(2u_r)$$

führte, zeigt, daß man

$$(177) \qquad H_r^{(2\sigma_\varkappa)}(n_2; n_1) \sim \frac{n_2 - n_1}{2P_r} \cdot h_r(2\sigma_\varkappa)$$

hat. Für die asymptotische Darstellung ist demnach nur die Länge des Bereichs maßgebend, dem die Anfangszahlen der betreffenden Lückenzahlfolgen entnommen werden, gleichgültig aber die Lage des Bereichs. Man findet hier eine Eigenschaft wieder, die der Anzahl der Primzahlen $\pi(n)$ zukommt; denn wenn n_2 groß gegen n_1 ist, so gilt die Gleichung

$$(178) \qquad \pi(n_2) - \pi(n_1) \sim \pi(n_2 - n_1).$$

Nach § 11 gilt für $r > R$ die Formel

$$(90') \qquad h_r(2\sigma_\varkappa) = P_r^{(k+1)} \cdot S_r(2\sigma_\varkappa),$$

während für alle Stufen

$$(91') \qquad h_r(2\sigma_\varkappa) = h_1(2\sigma_\varkappa) \cdot \prod_{\varrho=2}^{r} (p_\varrho - V(p_\varrho))$$

war[1]. Das Verfahren, das in § 18 zum Beweise des Lehrsatzes I führte, gibt zugleich die Mittel, die betrachteten Lückenzahlen zu finden. Weil nämlich die Anfangszahlen, die im Hauptabschnitt liegen, durch ihre charakteristischen Restsysteme eindeutig bestimmt sind, so gibt es genau soviel Lückenzahlfolgen der verlangten Art als Restsysteme $1, p_1-t_1, \ldots, p_r-t_r$. Folglich ist $h_r(2\sigma_\varkappa)$ gleich dem Produkt der Anzahlen der Nichtreste der Teilsummen $2\sigma_\varkappa$ gegen die Primzahlen $3, 5, \ldots, p_r$, also

$$h_r(2\sigma_\varkappa) = \prod_{\varrho=1}^{r} \left(p_\varrho - V(p_\varrho)\right). \tag{179}$$

Damit ist die Formel (91′) in einfachster Weise hergeleitet; zugleich hat sich ergeben, daß $h_1(2\sigma_\varkappa) = 3 - V(3)$ ist, eine Gleichung, die man leicht unmittelbar bestätigt. Es sei noch bemerkt, daß eine Primzahl von Maximalcharakter zum Produkt den Faktor Eins beiträgt.

Die Formel (179) gilt für beliebige Differenzenfolgen. Ist eine solche Folge unbeständig, so wird bei wachsender Stufenzahl einmal $V(p_r) = p_r$ und $h_r(2\sigma_\varkappa)$ verschwindet. Ist die Folge beständig, so sind alle Faktoren von Null verschieden. In diesem Falle besteht die Gleichung (90), und man hat

$$S_r(2\sigma_\varkappa) = \frac{\Pi\left(p_\varrho - V(p_\varrho)\right)}{P_r^{(k+1)}}. \tag{180}$$

Weil für $\varrho \geqq a$ die Anzahl $V(p_\varrho) = k+1$ wird, haben die Funktionen $S_r(2\sigma_\varkappa)$ für $r \geqq a$ sämtlich denselben Wert, nämlich

$$S(2\sigma_\varkappa) = \Pi\left(p' - V(p')\right) \cdot \Pi \frac{p'' - V(p'')}{p'' - k - 1}; \tag{181}$$

das Zeichen p' bedeutet die Primzahlen erster Art $3, 5, \ldots, p_R$, das Zeichen p'' die Primzahlen zweiter Art $p_{R+1}, p_{R+2}, \ldots, p_a$. Die Schwankungsfunktion $S(2\sigma_\varkappa)$ läßt sich daher aus den Multiplikatoren erster und zweiter Art zusammensetzen:

---

[1] In den Formeln (91) und (92) (Teil II, S. 17) ist in den Produkten der Anfangswert von ϱ gleich 2 (statt 1) zu setzen. Ferner ist $\mu_\varrho + 1 = V(p_\varrho)$; hiernach ist die S. 16 gegebene Erklärung des Zeichens μ_r zu verbessern.

$$M_1(p') = p' - V(p') \qquad (p' \leq k+1)\,; \tag{182}$$

$$M_2(p'') = \frac{p''-V(p'')}{p''-k-1} = 1 + \frac{k+1-V(p'')}{p''-k-1} \qquad (p''>k+1)\,. \tag{183}$$

Die Multiplikatoren erster Art sind ganze Zahlen aus der Reihe $0, 1, \ldots, p'-1$. Die Multiplikatoren zweiter Art sind größer als Eins, wenn $V(p'') < k+1$ ist; gleich Eins, wenn $V(p'') = k+1$ ist. Der Wert Eins gilt stets, wenn $p'' > p_a$ gewählt wird; man braucht daher nur die Primzahlen $p'' \leq p_a$ zu berücksichtigen. Aber auch für $p'' < p_a$ kann $M_2(p'') = 1$ sein. Die Primzahlen zweiter Art, bei denen der Multiplikator größer als Eins ist, sollen als wirksam bezeichnet werden (vgl. *Darstellung*, S. 8, und Teil I, S. 15).

Primzahlen von Maximalcharakter, bei denen also $V(p) = p-1$ ist, sind $\leq k+2$, also im allgemeinen erster Art, und es ist dann $M_1(p) = 1$; nur $k+2$ kann als Primzahl zweiter Art Maximalcharakter tragen, aber auch in diesem Falle ist der Multiplikator gleich Eins.

Aus der Gleichung (179) läßt sich sogleich eine wichtige Folgerung ziehen, die in Form eines Lehrsatzes ausgesprochen werde:

LEHRSATZ IX. Die Anzahl der Lückenzahlfolgen r-ter Stufe, die gegebene Differenzen aufweisen und deren Anfangszahlen im Hauptabschnitt liegen, ist für die abgeleiteten Folgen dieselbe wie für die Grundfolge.

Um die Multiplikatoren $M_1(p')$ und $M_2(p'')$ herzustellen, hat man die Anzahlen $V(p')$ und $V(p'')$ zu ermitteln. Hierfür hat WEINREICH ein zweckmäßiges Verfahren erdacht. Man bilde die schon in § 18 eingeführten Differenzen der Teilsummen

$$2w_{\varkappa\lambda} = 2\sigma_\varkappa - 2\sigma_\lambda = 2\delta_\varkappa + 2\delta_{\varkappa-1} + \cdots + 2\delta_{\lambda+1} \qquad (\varkappa > \lambda)\,. \tag{184}$$

Sie sollen die zur Folge $2\delta_1, \ldots, 2\delta_k$ gehörigen wirksamen Zahlen genannt werden. Die $\frac{1}{2}k(k+1)$ wirksamen Zahlen lassen sich, wie die Tafel 16 zeigt, in Form eines Dreiecks anordnen.

Schreibt man in die Felder des Dreiecks $\Delta(2\sigma_\varkappa)$ die ungeraden Primteiler der wirksamen Zahlen, so gilt der

LEHRSATZ X. Wenn der Primteiler p in $z(p)$ Zeilen des Dreiecks der wirksamen Zahlen fehlt, so ist $V(p) = z(p) + 1$.

TAFEL 16

Das Dreieck $\Delta(2\sigma_\lambda)$ der wirksamen Zahlen $2w_{\varkappa\lambda}$

	$2\sigma_1$	$2\sigma_2$	$2\sigma_3$	....	$2\sigma_\lambda$	....	$2\sigma_\varkappa$	....	$2\sigma_{k-1}$	$2\sigma_k$
$2\sigma_0$	$2w_{10}$	$2w_{20}$	$2w_{30}$	....	$2w_{\lambda 0}$	....	$2w_{\varkappa 0}$	....	$2w_{k-1,0}$	$2w_{k0}$
$2\sigma_1$		$2w_{21}$	$2w_{31}$	....	$2w_{\lambda 1}$	....	$2w_{\varkappa 1}$	....	$2w_{k-1,1}$	$2w_{k1}$
$2\sigma_2$			$2w_{32}$	....	$2w_{\lambda 2}$	....	$2w_{\varkappa 2}$	....	$2w_{k-1,2}$	$2w_{k2}$
....				....	....	....	....	....	....	....
$2\sigma_\lambda$						....	$2w_{\varkappa\lambda}$	....	$2w_{k-1,\lambda}$	$2w_{k\lambda}$
....							....	....	....	....
$2\sigma_\varkappa$								....	$2w_{k-1,\varkappa}$	$2w_{k\varkappa}$
....									....	....
$2\sigma_{k-2}$									$2w_{k-1,k-2}$	$2w_{k,k-2}$
$2\sigma_{k-1}$										$2w_{k,k-1}$

Beweis. Haben zwei Teilsummen, $2\sigma_\varkappa$ und $2\sigma_\lambda$, $\varkappa > \lambda$, verschiedene Reste gegen p, so ist die wirksame Zahl $2w_{\varkappa\lambda}$ nicht durch p teilbar; sind sie aber kongruent mod. p, so findet sich in der Zeile mit dem Eingang $(2\sigma_\varkappa)$ der Primteiler p, und umgekehrt. Die Teilsumme mit dem größten Zeiger, die einen bestimmten Rest s liefert, soll die letzte Teilsumme des Restes s genannt werden. Es gibt so viele letzte Teilsummen, als es verschiedene Reste gibt, also $V(p)$. Ist $2\sigma_\mu$ die letzte Teilsumme des Restes s, so ist die Zeile mit dem Eingang $(2\sigma_\mu)$ frei von p, denn die Zahlen $2\sigma_{\mu+1}, \ldots, 2\sigma_k$ haben Reste, die von s verschieden sind. Ausgenommen ist nur die Teilsumme $2\sigma_k$, die sicher die letzte Teilsumme ihres Restes ist, weil es keine Zeile dieses Eingangs gibt. Ist umgekehrt die Zeile mit dem Eingang $(2\sigma_\mu)$ frei von p, so ist $2\sigma_\mu$ die letzte Teilsumme ihres Restes. Folglich gibt es so viele letzte Teilsummen, als es von p freie Zeilen gibt, das heißt $z(p)$, und dazu kommt noch die letzte Teilsumme $2\sigma_k$, sodaß im ganzen $V(p) = z(p) + 1$ wird.

Die Gleichungen für die Multiplikatoren lauten jetzt

$$(182') \qquad M_1(p') = p' - z(p') - 1 \qquad (p' \leq k+1)\,;$$

$$(183') \qquad M_2(p'') = \frac{p'' - z(p'') - 1}{p'' - k - 1} = 1 + \frac{k - z(p'')}{p'' - k - 1} \qquad (p'' > k+1)\,.$$

Die zweite Gleichung zeigt, daß eine Primzahl zweiter Art wirksam ist, sobald sie auch nur in einer Zeile des Dreiecks auftritt. Folglich sind die wirksamen Primzahlen identisch mit den Primteilern der wirksamen Zahlen, die größer als $k+1$ ausfallen.

Man hat es nicht nötig, sich für jede neue Folge $(2\sigma_\varkappa)$ das Dreieck der wirksamen Zahlen von neuem herzustellen; es genügt vielmehr, ein für allemal eine Tafel anzufertigen, die als Eingänge der Spalten die Reihe der geraden Zahlen $2, 4, 6, \ldots$ zeigt, als Eingänge der Zeilen $0, 2, 4, 6, \ldots$ und die in der ersten Zeile für die Eingänge der Spalten deren ungerade Primteiler angibt, während in jeder folgenden Zeile die Teilersysteme um je eine Spalte nach rechts verschoben sind. Den Anfang einer solchen Tafel bildet die Tafel 17. Für die Untersuchung einer gegebenen Diffe-

TAFEL 17

Das große Dreieck der wirksamen Zahlen

	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
0	—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11	3	13	7	3,5	—	17	3	19	5
2		—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11	3	13	7	3,5	—	17	3	19
4			—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11	3	13	7	3,5	—	17	3
6				—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11	3	13	7	3,5	—	17
8					—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11	3	13	7	3,5	—
10						—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11	3	13	7	3,5
12							—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11	3	13	7
14								—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11	3	13
16									—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11	3
18										—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11
20											—	—	3	—	5	3	7	—	3	5
22												—	—	3	—	5	3	7	—	3
24													—	—	3	—	5	3	7	—
26														—	—	3	—	5	3	7
28															—	—	3	—	5	3
30																—	—	3	—	5
32																	—	—	3	—
34																		—	—	3
36																			—	—
38																				—

renzenfolge hat man nur die Zeilen und Spalten zuzudecken, deren Eingänge nicht zu den betreffenden Teilsummen gehören.

Beispiel I. Die Folge der Differenzen sei (30), die der Teilsummen $(0, 30)$, also $k=1$. Dann gibt es nur Primzahlen zweiter Art. Man erhält hier sofort das Dreieck

	30
0	3, 5

Mithin ist $z(3)=0$, $M_2(3)=2$ und $z(5)=0$, $M_2(5)=\frac{4}{3}$. Die folgenden Primzahlen sind nicht mehr wirksam, und man hat

$$S(0,30)=\frac{8}{3}.$$

Beispiel II. Die Folge der Differenzen sei $(6,6,10,6,2)$, die der Teilsummen $(0,6,12,22,28,30)$, also $k=5$. Primzahlen erster Art sind 3 und 5. Aus Tafel 17 oder unmittelbar durch Differenzenbildung erhält man das Dreieck

	6	12	22	28	30
0	3	3	11	7	3, 5
6		3	—	11	3
12			5	—	3
22				3	—
28					—

Mithin ist

$$z(3)=1,\ z(5)=3,\ z(7)=4,\ z(11)=3,$$

$$M_1(3)=1,\ M_1(5)=1,\ M_2(7)=2,\ M_2(11)=\frac{7}{5}.$$

Die folgenden Primzahlen sind nicht mehr wirksam, und man hat

$$S(0,6,12,22,28,30)=\frac{11}{5}.$$

Beispiel III. Es sei die schon in § 20 aufgetretene Differenzenfolge $(2,4,2,22,2,4,2)$ vorgelegt; die Folge der Teilsummen ist $(0,2,6,8,30,32,36,38)$. Weil $k=7$ ist, hat man als Primzahlen erster Art $3,5,7$, und weil $\sigma_7=19$ ist, als Primzahlen zweiter Art $11,13,17,19$. Aus der Tafel 17 oder unmittelbar durch Differenzenbildung ergibt sich das Dreieck

	2	6	8	30	32	36	38
0	—	3	—	3, 5	—	3	19
2		—	3	7	3, 5	17	3
6			—	3	13	3, 5	—
8				11	3	7	3, 5
30					—	3	—
32						—	3
36							—

Hieraus folgt:

p'	3	5	7	p''	11	13	17	19
$z(p')$	1	3	5	$z(p'')$	6	6	6	6
$M_1(p')$	1	1	1	$M_2(p'')$	4/3	6/5	10/9	12/11

Schließlich wird

$$S(0,2,6,8,30,32,38) = \frac{64}{33}.$$

Beispiel IV. Wie man mittels der charakteristischen Restsysteme die Anfangsglieder von Lückenzahlfolgen bestimmt, denen gegebene Differenzen zukommen, möge an der soeben betrachteten Folge $(2,4,2,22,2,4,2)$ erläutert werden. Wenn es sich um Lückenzahlfolgen fünfter Stufe handelt, so kommen die Primzahlen $3,5,7,11,13$ in Frage. Man findet als Nichtreste

$$t_3:1;\quad t_5:4;\quad t_7:5;\quad t_{11}:1,4,7,9;\quad t_{13}:1,3,5,7,9,11,$$

sodaß nach Gleichung (179) im Hauptabschnitt fünfter Stufe, der von 1 bis 30030 geht, 24 Folgen der gesuchten Art beginnen. Die 24 charakteristischen Restsysteme in bezug auf die Primzahlen $2,3,5,7,11,13$ werden:

2	3	5	7	11	13
1	2	1	2	2, 4, 7, 10	2, 4, 6, 8, 10, 12

Die Anfangszahlen v_5 lassen sich nach § 18 in der Form

$$b_1 + 2b_2 + 6b_3 + 30b_4 + 210b_5 + 2310b_6$$

darstellen. Weil man für die Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4 der Reihe nach nur die Werte $1, 2, 1, 2$ zu setzen hat, wird für alle Anfangszahlen $b_1 + 2b_2 + 6b_3 + 30b_4 = 191$. Dann ist b_5 vermöge der vier zur Primzahl 7 gehörigen Charakteristiken $2, 4, 7, 10$ zu bestimmen. Eine einfache Rechnung ergibt die Werte $9, 0, 3, 6$, sodaß für die Anfangszahlen v_5 die vier Linearformen

$$2081 + 2310b_6, \quad 191 + 2310b_6, \quad 821 + 2310b_6, \quad 1451 + 2310b_6$$

herauskommen. Es bleibt übrig, b_6 mittels der Charakteristiken $2, 4, 6, 8, 10, 12$ zu bestimmen. Die Rechnung ergibt:

b_5	b_6					
9	3	9	2	8	1	7
0	5	11	4	10	3	9
3	0	6	12	5	11	4
6	8	1	7	0	6	12

Die 24 Anfangszahlen im Hauptabschnitt fünfter Stufe von 1 bis 30 030 werden jetzt:

9 011	22 871	6 701	20 561	4 391	18 251
11 741	25 601	9 431	23 291	7 121	20 981
821	14 681	28 541	12 371	26 231	10 061
91 931	3 761	17 621	1 451	15 311	29 171

Alle weiteren achtgliedrigen Lückenzahlfolgen fünfter Stufe mit den Differenzen $(2, 4, 2, 22, 2, 4, 2)$ ergeben sich hieraus durch wiederholtes Hinzufügen von 30 030.

Der Übergang von den Lückenzahlen zu den Primzahlen erfolgt auf die in § 5 (Teil I, S. 26) und § 12 (Teil II, S. 18) dargelegte Art. In der abgeänderten Schreibweise wird

$$(98') \qquad H^{(2\sigma_\varkappa)}(n_2; n_1) \sim A_k \cdot \frac{\left(\pi(n_2-n_1)\right)^{k+1}}{(n_2-n_1)^k} \cdot S(2\sigma_\varkappa) ;$$

hierin ist

$$(97') \qquad A_k = \lim_{r=\infty} \frac{(2P_r)^k\, P_r^{(k+1)}}{\left(P_r^{(1)}\right)^{k+}}$$

zu setzen. Der Ausdruck auf der rechten Seite der Formel (98′) verschwindet, wenn die Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ einer unbeständigen Differenzenfolge angehören. Daß bei solchen Differenzenfolgen wirklich für hinreichend große Werte von n_2-n_1 die H-Funktion gleich Null wird, ist in § 20 gezeigt worden.

Weinreich hat die Werte der ersten sieben Konstanten A_k berechnet, indem er wegen der langsamen Konvergenz der unendlichen Produkte bis zu $r=1499$ ging. Es ergab sich

$$A_1 = 1{,}320; \quad A_2 = 2{,}859; \quad A_3 = 4{,}153; \quad A_4 = 10{,}140; \quad A_7 = 148{,}88.$$

Das stimmt mit den früher berechneten Werten $\varkappa = 1{,}320$ (*Darstellung*, S. 20) und $\varkappa^{(2)} = 4{,}150$ (Teil I, S. 39)[1].

§ 22

Beziehungen zwischen den Schwankungsfunktionen, die zu gegebenen Differenzenfolgen gehören

Die Ermittlung der Schwankungsfunktionen wird erleichtert und die Einsicht in ihre Eigenschaften gefördert, wenn man beachtet, daß zwischen ihnen einfache Beziehungen bestehen.

Die Folge der Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ soll erweitert werden, indem ihr eine Einschubzahl 2ε hinzugefügt wird. In der erweiterten $(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon)$ Folge möge 2ε zwischen $2\sigma_\mu$ und $2\sigma_{\mu+1}$ stehen;

[1] Entsprechend den Formeln (97) und (97′) muß in § 12 (Teil II, S. 20) in der Formel (96) der Nenner der linken Seite $(p_r-1)^{\mu+1}$ statt $(p_r-\mu-1)^{\mu+1}$ heißen.

ist $2\varepsilon > 2\sigma_k$, so tritt es ans Ende. Die neuen Primzahlen erster Art π' sind erstens die alten $p' \leq k+1$ und zweitens $k+2$, wenn es eine Primzahl ist. Die Zahl $k+2$ tritt dann aus der Reihe der Primzahlen zweiter Art in die der ersten Art. Bei den neuen Primzahlen zweiter Art π'' geht $k+2$ verloren, falls es eine Primzahl ist. Neue Primzahlen zweiter Art können nur für $2\varepsilon > 2\sigma_k$ hinzutreten.

Die Tafel 18 zeigt das erweiterte Dreieck der wirksamen Zahlen. Hinzugekommen sind die Einschubzeile und die Einschubspalte; als gemeinsamer Name möge für beide Einschubreihe gebraucht werden. Die Einschubzahl 2ε findet sich nur in den Einschubreihen. Jetzt gilt der

LEHRSATZ XI. Wenn die Einschubzahl keiner der ursprünglichen Teilsummen gegen eine Primzahl p kongruent ist, so ist die Anzahl der von p freien Zeilen des erweiterten Dreiecks um Eins größer als beim ursprünglichen Dreieck. Ist aber die Einschubzahl mindestens einer der ursprünglichen Teilsummen kongruent, so bleibt die Anzahl der von p freien Zeilen erhalten.

Beweis. I. Es sei keine der Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ der Einschubzahl 2ε kongruent. Dann haben die ersten $\mu+1$ Zeilen des erweiterten Dreiecks denselben Charakter wie die ersten $\mu+1$ Zeilen des ursprünglichen Dreiecks, und dasselbe gilt von den letzten $k-\mu-1$ Zeilen. In der Einschubzeile fehlt der Primteiler p, folglich ist die Anzahl der von p freien Zeilen im erweiterten Dreieck $\zeta(p) = z(p)+1$.

II. Mindestens eine der Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ ist der Einschubzahl 2ε kongruent. Dann sind drei Möglichkeiten zu unterscheiden.

1. Die erste Teilsumme $2\sigma_\lambda$, die kongruent 2ε ist, steht in der Einschubzeile. Dann ist $\lambda > \mu$, keine der in der Einschubzeile stehenden Differenzen ist durch p teilbar, und man hat daher $\zeta(p) = z(p)$.

2. Die erste Teilsumme $2\sigma_\lambda$, die kongruent 2ε ist, steht in der Einschubspalte, und die Zeile mit dem Eingang $(2\sigma_\lambda)$ ist im ursprünglichen Dreieck frei von p. Dann ist keine der folgenden Teilsummen $2\sigma_{\lambda+1}, \ldots, 2\sigma_k$ kongruent 2ε. Mithin verliert zwar die

TAFEL 18. Das erweiterte Dreieck der wirksamen Zahlen

	$2\sigma_1$	$2\sigma_2$	....	$2\sigma_\mu$	2ε	$2\sigma_{\mu+1}$	....	$2\sigma_{k-1}$	$2\sigma_k$
$2\sigma_0$	$2w_{10}$	$2w_{20}$	....	$2w_{\mu 0}$	2ε	$2w_{\mu+1,0}$	....	$2w_{k-1,0}$	$2w_{k0}$
$2\sigma_1$		$2w_{21}$	....	$2w_{\mu 1}$	$2\varepsilon-2\sigma_1$	$2w_{\mu+1,1}$	....	$2w_{k-1,1}$	$2w_{k1}$
....			......	....	....	....	....	....	....
$2\sigma_\mu$					$2\varepsilon-2\sigma_\mu$	$2w_{\mu+1,\mu}$	....	$2w_{k-1,\mu}$	$2w_{k\mu}$
2ε						$2\sigma_{\mu+1}-2\varepsilon$	....	$2\sigma_{k-1}-2\varepsilon$	$2\sigma_k-2\varepsilon$
$2\sigma_{\mu+1}$							....	$2w_{k-1,\mu+1}$	$2w_{k,\mu+1}$
....							......	....	....
$2\sigma_{k-2}$								$2w_{k-1,k-2}$	$2w_{k,k-2}$
$2\sigma_{k-1}$									$2w_{k,k-1}$

Zeile mit dem Eingang $(2\sigma_\lambda)$ die Eigenschaft, p nicht aufzuweisen, dafür ist aber die Einschubzeile frei von p, und es bleibt $\zeta(p)=z(p)$.

3. Die erste Teilsumme $2\sigma_\lambda$, die kongruent 2ε ist, steht in der Einschubspalte und die Zeile mit dem Eingang $(2\sigma_\lambda)$ enthält schon im ursprünglichen Dreieck den Primteiler p. Ist aber in dieser Zeile etwa $2\dot{w}_{\varkappa\lambda}$ durch p teilbar, so muß auch $2\sigma_\varkappa$, $\varkappa>\lambda$, kongruent 2ε sein. Die Zeile mit dem Eingang $(2\sigma_\varkappa)$ enthält entweder im ursprünglichen Dreieck den Primteiler p oder nicht. Im ersten Fall gibt es wieder einen Zeiger $\varkappa'>\varkappa$, sodaß $2\sigma_{\varkappa'}$ kongruent 2ε ist, und bei der Zeile mit dem Eingang $(2\sigma_{\varkappa'})$ sind abermals die beiden Fälle möglich. So fortschließend gelangt man entweder zu einem Zeiger, der größer als μ ist, oder man erhält vorher eine Zeile, bei der nur die Einschubspalte eine durch p teilbare Zahl aufweist. Ist e r s t e n s der Zeiger größer als μ, so stehen die Teilsummen, die der Einschubspalte angehören und kongruent 2ε sind, immer in Zeilen, die schon beim ursprünglichen Dreieck p enthielten, und weil die Einschubzeile auch p enthält, so ist $\zeta(p)=z(p)$. Gelangt man z w e i t e n s zu einer Zeile $(2\sigma_\iota)$, $\iota\leq\mu$, bei der nur $2\varepsilon-2\sigma_\iota$ den Teiler p hat, so ist keine der folgenden Teilsummen $2\sigma_{\iota+1},\ldots,2\sigma_k$ kongruent 2ε, die Zeile mit dem Eingang $(2\sigma_\iota)$ verliert dann die Eigenschaft, p nicht aufzuweisen, dafür aber ist die Einschubzeile frei von p, und es bleibt wieder $\zeta(p)=z(p)$.

Aus dem Lehrsatz XI ergeben sich einfache Beziehungen zwischen den Multiplikatoren $M_1(p')$ und $M_2(p'')$ der Folge $(2\sigma_\varkappa)$ und den Multiplikatoren $\mathrm{M}_1(\pi')$ und $\mathrm{M}_2(\pi'')$ der erweiterten Folge $(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon)$. Es ist nämlich

I. wenn keine der Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ der Einschubzahl 2ε gegen die betrachtete Primzahl kongruent ist:

$$\text{(I)}\quad\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{M}_1(\pi')=\pi'-z(\pi')-2=M_1(\pi')\cdot\frac{\pi'-z(\pi')-2}{\pi'-z(\pi')-1}\qquad(\pi'\leq k+1),\\
&\mathrm{M}_1(k+2)=k+2-z(k+2)-2=M_2(k+2)\cdot\frac{k+2-z(k+2)-2}{k+2-z(k+2)-1}\\
&\hspace{16em}(\text{wenn } k+2 \text{ Primzahl}),\\
&\mathrm{M}_2(\pi'')=\frac{\pi''-z(\pi'')-2}{\pi''-k-2}=M_2(\pi'')\cdot\frac{\pi''-k-1}{\pi''-k-2}\cdot\frac{\pi''-z(\pi'')-2}{\pi''-z(\pi'')-1}\\
&\hspace{20em}(\pi''>k+2)\,;
\end{aligned}\right.$$

II. wenn mindestens eine der Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ der Einschubzahl 2ε kongruent ist:

$$
(11)\begin{cases}
\mathrm{M}_1(\pi') = \pi' - z(\pi') - 1 = M_1(\pi') & (\pi' \leqq k+1),\\
\mathrm{M}_1(k+2) = k+2-z(k+2)-1 = M_2(k+2) & (\text{wenn } k+2 \text{ Primzahl}),\\
\mathrm{M}_2(\pi'') = \dfrac{\pi''-z(\pi'')-1}{\pi''-k-2} = M_2(\pi'')\cdot\dfrac{\pi''-k-1}{\pi''-k-2} & (\pi'' > k+2).
\end{cases}
$$

Bildet man nunmehr die Schwankungsfunktionen $S(2\sigma_\varkappa)$ und $S(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon)$, so spielen diejenigen Primzahlen eine besondere Rolle, gegen die keine der Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ der Einschubzahl 2ε kongruent ist. Wenn diese Primzahlen mit q bezeichnet werden, so gilt die Formel

$$
(185) \qquad S(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon) = S(2\sigma_\varkappa)\cdot \Pi\,\frac{\pi''-k-1}{\pi''-k-2}\cdot \Pi\,\frac{q-z(q)-2}{q-z(q)-1}.
$$

Es genügt, die Produkte auf die Primzahlen π'' und q zu erstrecken, die nicht größer als die größere der beiden Zahlen σ_k und ε sind; bei den Primzahlen π'', die größer als diese beiden Zahlen sind und die daher auch zu den Primzahlen q gehören, würden sich die entsprechenden Faktoren der beiden Produkte aufheben.

Weitere Beziehungen zwischen Schwankungsfunktionen ergeben sich, wenn man das Einschieben wiederholt. Es mögen also aus der ursprünglichen Folge der $k+1$ Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ die erweiterten Folgen $(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1)$ und $(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2)$ entstehen; daß die Einschubzahlen $2\varepsilon_1$ und $2\varepsilon_2$ von den ursprünglichen Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ und voneinander verschieden sein müssen, braucht kaum erwähnt zu werden. Bei den folgenden Untersuchungen darf man sich auf Primzahlen beschränken, die nicht größer sind als die größte der drei Zahlen $\sigma_k, \varepsilon_1, \varepsilon_2$. Das Zeichen π_1'' bedeute die Primzahlen, die größer als $k+2$; das Zeichen π_2'' diejenigen, die größer als $k+3$ sind; das Zeichen q_1 die Primzahlen, gegen die keine der Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ kongruent $2\varepsilon_1$ ist; das Zeichen q_2 die Primzahlen, gegen die keine der Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ und $2\varepsilon_1$ kongruent $2\varepsilon_2$ ist. Dann entspringt aus der Formel (185) die Verallgemeinerung

$$
(186)\left\{
\begin{aligned}
&S(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2)\\
&= S(2\sigma_\varkappa)\cdot \Pi\,\frac{\pi_1''-k-1}{\pi_1''-k-2}\cdot \Pi\,\frac{\pi_2''-k-2}{\pi_2''-k-3}\cdot \Pi\,\frac{q_1-z(q_1)-2}{q_1-z(q_1)-1}\cdot \Pi\,\frac{q_2-z_1(q_2)-2}{q_2-z_1(q_2)-1}.
\end{aligned}
\right.
$$

Hierin bezeichnet $z_1(q_2)$ die Anzahl der Zeilen des Dreiecks $\Delta(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1)$, die vom Primteiler q_2 frei sind.

Man erkennt leicht, daß der Ausdruck auf der rechten Seite sich vereinfachen läßt. Die Primzahlen π_1'' bestehen aus den Primzahlen π_2'' und der Zahl $k+3$, wenn diese eine Primzahl ist. Bedeutet also das Zeichen p^*, wenn $k+3$ eine Primzahl ist, diese Zahl, wenn es keine Primzahl ist, die Zahl $k+2$, so lassen sich die beiden ersten Produkte in das eine Produkt

$$
(p^*-k-1)\cdot \Pi\,\frac{\pi_2''-k-1}{\pi_2''-k-3}
$$

zusammenfassen. In dem vierten Produkt ist nach Lehrsatz XI $z_1(q_2)$ gleich $z(q_2)+1$, wenn die Einschubzahl $2\varepsilon_1$ keiner der Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ kongruent ist, und gleich $z(q_2)$, wenn sie mindestens einer der Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ kongruent ist. Der erste Fall tritt ein, wenn eine Primzahl q_1'' gleichzeitig zu den Primzahlen q_1 und q_2 gehört, oder, wie man auch sagen kann, wenn der Primteiler q_1'' beim Dreieck $\Delta(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2)$ in den Einschubreihen fehlt. Vereinigt man die Faktoren der beiden letzten Produkte, bei denen q_1 und q_2 den gemeinsamen Wert q_1'' haben, so ergibt sich

$$
\Pi\,\frac{q_1''-z(q_1'')-3}{q_1''-z(q_1'')-1}.
$$

Von den Zahlen q_1 bleiben diejenigen übrig, bei denen keine der Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ kongruent gegen $2\varepsilon_1$ und gleichzeitig mindestens eine der Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ und $2\varepsilon_1$ kongruent gegen $2\varepsilon_2$ ist. Von den Zahlen q_2 bleiben diejenigen übrig, bei denen keine der Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ und $2\varepsilon_1$ gegen $2\varepsilon_2$ kongruent und mindestens eine der Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ gegen $2\varepsilon_1$ kongruent ist. Die Gesamtheit der nach Ausscheidung der Zahlen q_1'' von q_1 und q_2 übrigbleibenden Zahlen q_1' läßt sich dadurch kennzeichnen, daß sie beim Dreieck $\Delta(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2)$ entweder in Einschubreihen mit dem Eingang $(2\varepsilon_1)$ oder in den Einschubreihen mit dem Eingang $(2\varepsilon_2)$ fehlen. Die Zahlen q_1' ergeben das Produkt

$$\Pi \frac{q_1' - z(q_1') - 2}{q_1' - z(q_1') - 1},$$

und damit ist die Formel gewonnen:

$$(186') \left\{ \begin{aligned} & S(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2) = S(2\sigma_\varkappa) \cdot (p^* - k - 1) \\ & \times \Pi \frac{\pi_2'' - k - 1}{\pi_2'' - k - 3} \cdot \Pi \frac{q_1' - z(q_1') - 2}{q_1' - z(q_1') - 1} \cdot \Pi \frac{q_1'' - z(q_1'') - 3}{q_1'' - z(q_1'') - 1}. \end{aligned} \right.$$

Dabei ist

1. $p^* = k+3$, wenn dies eine Primzahl ist; gleich $k+2$, wenn es keine ist.

2. $k+3 < \pi_2'' \leqq \sigma_k, \varepsilon_1, \varepsilon_2$.

3. Die Primzahlen q_1' sind nicht größer als $\sigma_k, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ und so beschaffen, daß im Dreieck $\Delta(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2)$ der Primteiler q_1' entweder in den Einschubreihen $(2\varepsilon_1)$ oder in den Einschubreihen $(2\varepsilon_2)$ fehlt.

4. Die Primzahlen q_1'' sind nicht größer als $\sigma_k, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ und so beschaffen, daß im Dreieck $\Delta(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2)$ der Primteiler q_1'' in den Einschubreihen $(2\varepsilon_1)$ und $(2\varepsilon_2)$ fehlt.

Man übersieht jetzt, wie es geht, wenn man weitere Zahlen einschiebt, sodaß sich aus der ursprünglichen Folge $(2\sigma_\varkappa)$ der Reihe nach die Folgen

$$(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1), (2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2), \ldots, (2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \ldots, 2\varepsilon_i)$$

ergeben. Die Anzahlen der Zeilen in den Dreiecken $\Delta(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1)$, $\Delta(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2), \ldots, \Delta(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \ldots, 2\varepsilon_i)$, in denen der Primteiler p fehlt, seien beziehungsweise $z_1(p), z_2(p), \ldots, z_i(p)$. Die Zeichen $p_1'', p_2'', \ldots, p_i''$ mögen die Primzahlen bedeuten, die sämtlich nicht größer als die größte der Zahlen $\sigma_k, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_i$ und der Reihe nach größer sind als $k+2, k+3, \ldots, k+i+1$. Endlich seien $q_1, q_2, \ldots, q_i$ die Primzahlen, die wieder sämtlich nicht größer als die größte der Zahlen $\sigma_k, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_i$ sind und für die der Reihe nach keine der Teilsummen $(2\sigma_\varkappa), (2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1), \ldots, (2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \ldots, 2\varepsilon_{i-1})$ den Zahlen $2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \ldots, 2\varepsilon_i$ kongruent ist. Dann entspringt zunächst durch wiederholte Anwendung der Gleichung (185) die Formel

$$(187)\begin{cases} S(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \ldots, 2\varepsilon_i) \\ = S(2\sigma_\varkappa)\cdot\Pi\,\dfrac{p_1''-k-1}{p_1''-k-2}\cdot\Pi\,\dfrac{p_2''-k-2}{p_2''-k-3}\cdot\ldots\cdot\Pi\,\dfrac{p_i''-k-i}{p_i''-k-i-1} \\ \times\Pi\,\dfrac{q_1-z(q_1)-2}{q_1-z(q_1)-1}\cdot\Pi\,\dfrac{q_2-z_1(q_2)-2}{q_2-z_1(q_2)-1}\cdot\ldots\cdot\Pi\,\dfrac{q_i-z_{i-1}(q_i)-2}{q_i-z_{i-1}(q_i)-1}.\end{cases}$$

Wiederum lassen sich die ersten i Produkte zusammenziehen, und man erhält den Ausdruck

$$\Pi(\mathfrak{p}-k-1)\cdot\Pi\,\frac{p''-k-1}{p''-k-i-1};$$

das Zeichen $\mathfrak{p}$ bedeutet alle Primzahlen, die den Ungleichheiten

$$k+2<\mathfrak{p}\leqq k+i+1$$

genügen; das Zeichen p'' alle Primzahlen, die größer als $k+i+1$ sind, bis zur größten der Zahlen $\sigma_k, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_i$.

Ebenso lassen sich die Produkte in der zweiten Zeile umformen, indem man alles auf die Funktion $z(p)$ zurückführt. An Stelle der Primzahlen $q_1, q_2, \ldots, q_i$ hat man dazu die Primzahlen $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_i$ einzuführen, die sämtlich nicht größer sind als die größte der Zahlen $\sigma_k, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_i$, und bei denen der Reihe nach für $1, 2, \ldots, i$ Einschubzahlen in den zugehörigen Einschubreihen des Dreiecks $\Delta(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \ldots, 2\varepsilon_i)$ die betreffende Primzahl nicht vorkommt. Auf diese Art findet man als Umformung der Gleichung (187)

$$(187')\begin{cases} S(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \ldots, 2\varepsilon_i) = S(2\sigma_\varkappa)\cdot\Pi(\mathfrak{p}-k-1)\cdot\Pi\,\dfrac{p''-k-1}{p''-k-i-1} \\ \times\Pi\,\dfrac{\pi_1-z(\pi_1)-2}{\pi_1-z(\pi_1)-1}\cdot\Pi\,\dfrac{\pi_2-z(\pi_2)-3}{\pi_2-z(\pi_2)-1}\cdot\ldots\cdot\Pi\,\dfrac{\pi_i-z(\pi_i)-i-1}{\pi_i-z(\pi_i)-1}.\end{cases}$$

Diese Formel wird bei den Untersuchungen über die Urfolgen (§ 26 und 27) benutzt werden, und es wird sich herausstellen, daß sie für die wirkliche Berechnung der Schwankungsfunktionen gute Dienste leistet.

Zum Schluß werde noch mit Rücksicht auf die numerischen Anwendungen ein einfacher Satz hergeleitet. Wenn die Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ zu einer beständigen Folge gehören, so kann es vorkommen, daß die Erweiterung mit einer Einschubzahl 2ε zu einer unbeständigen Folge führt. Die Formel (185) zeigt, daß dies dann und nur dann geschieht, wenn für eine der Primzahlen q die Anzahl $z(q) = q-2$ wird. Dann läßt sich beweisen, daß auch die Erweiterung mit einer Einschubzahl $2\varepsilon'$, die kongruent 2ε gegen q ist, zu einer unbeständigen Folge führt. Weil nämlich bei allen Primzahlen q keine der ursprünglichen Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ kongruent 2ε gegen q war, so gilt dasselbe für $2\varepsilon'$; mithin ist nach Lehrsatz XI, wenn sich $\zeta'(p)$ auf das Dreieck $\Delta(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon')$ bezieht, $\zeta'(q) = z(q)+1 = q-1$, und der Multiplikator erster Art für q, $q-\zeta'(q)-1$, verschwindet.

§ 23

Zusammenhang zwischen den G- und den H-Funktionen

Daß zwischen den G- und den H-Funktionen ein enger Zusammenhang bestehe, hatte ich von Anfang an vermutet und später auch für einige besondere Fälle aufgezeigt (vgl. Teil II, S. 24 und 39). Den Ansatz zur allgemeinen Untersuchung entdeckt zu haben, ist ein Verdienst von Weinreich, dessen Mitteilungen im folgenden benutzt worden sind.

Es sei $2\delta_1, \ldots, 2\delta_1$ eine k-gliedrige symmetrische Differenzenfolge, also $2\delta_\varkappa = 2\delta_{k-\varkappa+1}$. Dann haben die $k+1$ Summen $2\sigma_\varkappa + 2\sigma_{k-\varkappa}$ denselben Wert, nämlich $2\sigma_k$, und umgekehrt, wenn das der Fall ist, wird $2\delta_\varkappa = 2\delta_{k-\varkappa+1}$, und die Folge ist symmetrisch.

Hat man zwei Lückenzahlfolgen r-ter Stufe $v_r + 2\sigma_\varkappa$ und $w_r + 2\sigma_\varkappa$, schreibt die zweite in umgekehrter Folge und addiert die entsprechenden Glieder beider Folgen, so haben die Summen $v_r + w_r + 2\sigma_\varkappa + 2\sigma_{k-\varkappa}$ den gemeinsamen Wert $v_r + w_r + 2\sigma_k$, und man erhält eine k-fache Darstellung der Zahl $2n = v_r + w_r + 2\sigma_k$ als Summe mittels Lückenzahlfolgen r-ter Stufe, denen die gegebenen symmetrischen Differenzen $2\delta_1, \ldots, 2\delta$ zukommen (vgl. Teil II, S. 38). Die Zahl $2n$ läßt sich aber auch, und das ist der Gedanke Weinreichs, auf k Arten als eine Differenz von Lückenzahlen r-ter Stufe auffassen. Wenn man nämlich $w'_r = -w_r - 2\sigma_k$ setzt, so wird

$$(188) \qquad 2n = (v_r + 2\sigma_\varkappa) - (w_r' + 2\sigma_\varkappa)\,;$$

die zweite Folge besteht aus negativen Lückenzahlen mit den gegebenen Differenzen $2\delta_1, \ldots, 2\delta_1$, die zwischen $-w_r - 2\sigma_k$ und $-w_r$ liegen. Mithin ist jeder der betrachteten k-fachen Darstellungen der Zahl $2n$ eine Folge von $2k+2$ Lückenzahlen r-ter Stufe zugeordnet: $w_r' + 2\sigma_\varkappa$, $v_r + 2\sigma_\varkappa$, deren Differenzen

$$2\delta_1, 2\delta_2, \ldots, 2\delta_2, 2\delta_1, 2n - 2\sigma_k, 2\delta_1, 2\delta_2, \ldots, 2\delta_2, 2\delta_1$$

sind; die zugehörigen Teilsummen haben die Werte

$$2\sigma_0, 2\sigma_1, \ldots, 2\sigma_k, 2n, 2n + 2\sigma_1, 2n + 2\sigma_2, \ldots, 2n + 2\sigma_k\,.$$

Hat man umgekehrt eine Folge von $2k+2$ Lückenzahlen r-ter Stufe, denen diese Differenzen und Teilsummen zukommen, und liegt die Anfangszahl w_r' im Abschnitt von $-2n - 2\sigma_k$ bis $-2\sigma_k$, so liegt $w_r = -w_r' - 2\sigma_k$ zwischen 0 und $2n$, und man erhält eine Darstellung der Zahl $2n$ als Summe der positiven Lückenzahlen w_r und $v_r + 2\sigma_k$; hieraus ergeben sich dann alle k Darstellungen von $2n$ als Summe mittels der k-gliedrigen Lückenzahlfolgen r-ter Stufe $v_r + 2\sigma_\varkappa$ und $w_r + 2\sigma_\varkappa$. Folglich gibt es genau soviel verschiedene Darstellungen der verlangten Art, als $(2k+2)$-gliedrige Lückenzahlfolgen mit den vorher gegebenen Differenzen vorhanden sind, deren Anfangszahlen im Abschnitt von $-2n - 2\sigma_k$ bis $-2\sigma_k$ liegen.

Ein Punkt ist noch zu erörtern. Bei der Erklärung der Anzahl der k-fachen Darstellungen, die jetzt mit $G_r^{(2\sigma_\varkappa)}(2n)$ bezeichnet werden möge, sollten Darstellungen als verschieden angesehen werden, wenn v_r von w_r verschieden ist; dagegen sollte eine k-fache Darstellung mit $v_r = w_r$ nur einmal zählen. Diese Forderung ist aber erfüllt; denn ist v_r von w_r verschieden, so führt die Identität

$$(188') \qquad 2n = (w_r + 2\sigma_\varkappa) - (v_r' + 2\sigma_\varkappa)\,,$$

in der $v_r' = -v_r - 2\sigma_k$ zu setzen ist, zu der $(2k+2)$-gliedrigen Folge $v_r' + 2\sigma_\varkappa$, $w_r + 2\sigma_\varkappa$, die mit der Lückenzahl $-v_r - 2\sigma_k$ beginnt und von der vorhergehenden Folge $w_r' + 2\sigma_\varkappa$, $v_r + 2\sigma_\varkappa$ verschieden ist.

Hiermit ist nachgewiesen, daß die Formel

$$(189) \qquad G_r^{(2\sigma_\varkappa)}(2n) = H_r^{(2\sigma_\varkappa,\, 2n+2\sigma_\varkappa)}(-2n-2\sigma_k;\, -2\sigma_k)$$

zu Recht besteht. Nach § 21, Gleichung (177) ist daher

$$(190) \qquad G_r^{(2\sigma_\varkappa)}(2n) \sim \frac{2n}{2P_r} \cdot h_r(2\sigma_\varkappa,\, 2n+2\sigma_\varkappa)\,,$$

und für $r>R$ wird nach Gleichung (90′):

$$(191) \qquad G_r^{(2\sigma_\varkappa)}(2n) \sim \frac{P_r^{(2k+2)}}{2P_r} \cdot 2n \cdot S_r(2\sigma_\varkappa,\, 2n+2\sigma_\varkappa)\,.$$

Von genügend hoher Stufe ab haben die Schwankungsfunktionen alle denselben Wert $S(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa)$, und zwar setzt sich dieser zusammen aus den Multiplikatoren erster und zweiter Art:

$$(182'') \qquad M_1(p') = p' - z(p') - 1 \qquad (p' < 2k+2),$$

$$(183'') \qquad M_2(p'') = \frac{p''-z(p'')-1}{p''-2k-2} = 1 + \frac{2k+1-z(p'')}{p''-2k-2} \qquad (p''>2k+2);$$

das Zeichen $z(p)$ bezieht sich hier auf das Dreieck der wirksamen Zahlen, das mittels der $2k+2$ Teilsummen $(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa)$ zu bilden ist.

Beim Übergang zu den Primzahlen hat man die rechte Seite der Gleichung (189) mit der $(2k+2)$-ten Potenz der Dichtigkeit, D_r^{2k+2}, zu multiplizieren und dann die Stufenzahl r ins Unendliche wachsen zu lassen. Beim Grenzübergang stößt man auf ähnliche Schwierigkeiten, wie sie schon früher in solchen Fällen aufgetreten sind (vgl. Teil I, S. 18–20, 26–27). Der Erfolg rechtfertigt es, daß auch hier als Grenzwert der Schwankungsfunktion $S_r(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa)$ der für alle genügend hohen Stufen gültige Wert $S(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa)$ genommen wird. Ebenso erscheint die Wachstumsfunktion von $G^{(2\sigma_\varkappa)}(2n)$ in der Gestalt

$$(192) \qquad W^{(2\sigma_\varkappa)}(2n) = A_{2k+1} \cdot \frac{(\pi(2n))^{2k+2}}{(2n)^{2k+1}}\,.$$

Hiermit ist die asymptotische Darstellung wiedergewonnen, die in § 16 (Teil II, S. 39) auf Grund anderer Betrachtungen aufgestellt worden ist:

$$G^{(2\sigma_\varkappa)}(2n) \sim W^{(2\sigma_\varkappa)}(2n) \cdot S^{(2\sigma_\varkappa)}(2n)\,. \tag{151'}$$

Während aber dort über die Beschaffenheit der Schwankungsfunktion $S^{(2\sigma_\varkappa)}(2n)$ nichts ausgesagt werden konnte, hat sich jetzt ergeben, daß man

$$S^{(2\sigma_\varkappa)}(2n) = S(2\sigma_\varkappa,\ 2n+2\sigma_\varkappa) \tag{193}$$

hat; das ist der Zusammenhang zwischen den Schwankungsfunktionen der G- und der H-Funktionen.

Gleichzeitig wird jetzt aufgeklärt, warum V. BRUN (vgl. *Darstellung*, S. 16 und 22) einen Zusammenhang zwischen den GOLDBACHschen Zahlen $G^{(0)}(2n)$ und der Anzahl der Primzahlzwillinge $H^{(0,2)}(2n)$ gefunden hat, nämlich, daß man als Wachstumsfunktion von $G^{(0)}(2n)$ geradezu $H^{(0,2)}(2n)$ nehmen darf. Für jede eingliedrige Differenzenfolge (2δ) wird ja (vgl. Teil II, S. 22):

$$H^{(0,2\delta)}(2n) \sim A_1\,\frac{\pi^2(2n)}{2n}\cdot S(0,2\delta)\,, \tag{38'}$$

sodaß alle zweigliedrigen Primzahlfolgen zur Wachstumsfunktion $W^{(0)}(2n)$ führen. Ebenso führen alle $(2k+2)$-gliedrigen Primzahlfolgen zu der Wachstumsfunktion, die den k-fachen Darstellungen der Zahl $2n$ als Summe mittels $(k+1)$-gliedriger Primzahlfolgen zugeordnet ist.

§ 24

Die Schwankungsfunktionen der G-Funktionen

Aus den Formeln des vorhergehenden Paragraphen folgen in einfacher und übersichtlicher Weise die Sätze, die für die GOLDBACHschen Darstellungen in § 3 (Teil I, S. 19–21), die Zwillingsdarstellungen in § 7 (Teil I, S. 39–40) und die Vierlingsdarstellungen in § 17 (Teil II, S. 47) abgeleitet worden sind. Es kommen dabei im wesentlichen nur die Schwankungsfunktionen in Betracht; die Wachstumsfunktionen lassen sich sofort hinschreiben.

Bei den GOLDBACHschen Darstellungen ist $k=0$. Es gibt keine Primzahlen erster Art, und für die Primzahlen zweiter Art

p'' ist, da das wirksame Dreieck $\Delta(0, 2n)$ aus der einzigen Zahl $2n$ besteht, $z(p'')=0$, wenn p'' ein Teiler von $2n$ ist, $z(p'')=1$, wenn es kein Teiler ist. Mithin sind die Multiplikatoren

$$M_2(p'') = \frac{p''-1}{p''-2},$$

und es wird

$$S^{(0)}(2n) = S(0, 2n) = \Pi \frac{p-1}{p-2},$$

wo das Produkt über alle ungeraden Primteiler von $2n$ zu erstrecken ist[1].

Bei den Zwillingsdarstellungen besteht die Folge der Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ aus den Zahlen $0, 2$, und es ist $k=1$. Primzahl erster Art ist nur 3. Das Dreieck der wirksamen Zahlen wird

2	$2n$	$2n+2$
	$2n-2$	$2n$
		2

Mithin wird $z(3)=1$, wenn $2n$ durch 3 teilbar ist, und $z(3)=2$, wenn das nicht der Fall ist. Hieraus ergeben sich als Werte von $M_1(3)$ im ersten Falle 1 und im zweiten Falle 0, das heißt, nur die durch 6 teilbaren Zahlen gestatten Zwillingsdarstellungen. Ebenso leicht findet man für die Primzahlen zweiter Art $5, 7, \ldots$:

$z(p'') = 1$, wenn $2n$ den Teiler p'' hat, und $M_2(p'') = \dfrac{p''-2}{p''-4}$;

$z(p'') = 2$, wenn $2n-2$ oder $2n+2$ den Teiler p'' hat,

und $M_2(p'') = \dfrac{p''-3}{p''-4}$;

$z(p'') = 3$, wenn $2n$ und $2n \pm 2$ nicht durch p'' teilbar sind,

und $M_2(p'') = 1$.

---

[1] Hiernach ist die Formel (A), Teil I, S. 21, zu verbessern; in der dort angeführten Stelle der *Darstellung* ist die Formel in Ordnung.

Es möge noch bemerkt werden, daß die Primzahl 3 für die Folge $(0,2)$ Maximalcharakter hat; hieraus folgt (vgl. den Schluß von § 19), daß alle mittels der zugehörigen Lücken- und Primzahlfolgen darstellbaren Zahlen die Form $6n_1$ haben müssen.

Für die Vierlingsdarstellungen ist die Folge der Teilsummen $(0,2,6,8)$, und $k=3$. Primzahlen erster Art sind 3, 5, 7. Das wirksame Dreieck wird

2	6	8	$2n$	$2n+2$	$2n+6$	$2n+8$
	4	6	$2n-2$	$2n$	$2n+4$	$2n+6$
		2	$2n-6$	$2n-4$	$2n$	$2n+2$
			$2n-8$	$2n-6$	$2n-2$	$2n$
				2	6	8
					4	6
						2

Man erkennt hieraus sofort, daß $M_1(3)$ und $M_1(5)$ gleich 1 oder 0 sind, je nachdem $2n$ durch die betreffende Primzahl teilbar ist oder nicht. Demnach gestatten nur die durch 30 teilbaren Zahlen die geforderte Darstellung, ganz im Einklang damit, daß 3 und 5 Maximalcharakter tragen. Ferner hat man:

$M_1(7)=3$, wenn $2n$ durch 7 teilbar ist;

$M_1(7)=2$, wenn $2n-6$ und damit auch $2n+8$, oder $2n+6$ und damit auch $2n-8$ durch 7 teilbar sind;

$M_1(7)=1$, wenn $2n-2$ oder $2n+2$ durch 7 teilbar ist;

$M_1(7)=0$, wenn $2n-4$ oder $2n+4$ durch 7 teilbar ist.

Die Werte von $M_1(7)$ sind also genau gleich den Werten der früher (Teil II, S. 47) mit $\varphi(7)$ bezeichneten Funktion. Auch für die Multiplikatoren $M_2(p'')$ folgen, wie man sich leicht überzeugt, aus dem wirksamen Dreieck die früheren Ausdrücke. Die Durchführung im einzelnen kann um so eher unterbleiben, als die folgenden Untersuchungen Mittel gewähren werden, schneller zum Ziele zu gelangen; wir werden in § 25 auf dieses Beispiel zurückkommen.

Wie die Tafel 19 zeigt, besteht das wirksame Dreieck $\Delta(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa)$ aus zwei Dreiecken mit je k Zeilen und Spalten und einem Quadrat von $k+1$ Zeilen und Spalten. Die beiden Dreiecke, die als das obere und das untere unterschieden werden mögen, sind identisch mit dem Dreieck $\Delta(2\sigma_\varkappa)$. Das Quadrat $Q(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa)$ enthält die $(k+1)^2$ Zahlen $2n \pm 2w'_{\varkappa\lambda}$; das Zeichen w' soll andeuten, daß die Zeiger $\varkappa, \lambda$ über alle Zahlenpaare $\varkappa \leqq \lambda$ zu erstrecken sind, sodaß zu den Zahlen $2w_{\varkappa\lambda}$ die Zahlen $2w'_{\varkappa\varkappa} = 0$ hinzukommen.

Die Anzahl der Zeilen des Dreiecks $\Delta(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa)$, die den Primteiler p nicht enthalten, werde mit $z(p)$ bezeichnet; die entsprechende Anzahl für das Dreieck $\Delta(2\sigma_\varkappa)$ heiße $\zeta(p)$. Bei der Bestimmung von $z(p)$ ist es zweckmäßig, die ungeraden Primzahlen in vier Klassen zu teilen, je nachdem

$$\text{I. } p > n+\sigma_k, \qquad \text{III. } \sigma_k < p < 2\sigma_k,$$
$$\text{II. } 2\sigma_k < p \leqq n+\sigma_k, \qquad \text{IV. } p \leqq \sigma_k$$

ist. Wie die Tafel 20 für die beständige Differenzenfolge der Gewichte von 2 bis 12 zeigt, gilt vom Gewicht 4 ab die Ungleichheit $2\sigma_k \geqq 2k+2$. Wenn man also von dem Fall der Zwillingsdarstellungen absieht, kann es Primzahlen erster Art, $< 2k+2$, nur in der dritten und vierten Klasse geben; die beiden Arten zu trennen wird jedoch erst nötig, wenn man die Multiplikatoren aufstellt.

Erste Klasse. Primzahlen größer als $n+\sigma_k$ sind in keiner Zahl des Dreiecks $\Delta(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa)$ enthalten; mithin ist $z(p) = 2k+1$, und es gibt jenseits der Schranke $n+\sigma_k$ keine wirksamen Primzahlen. Man hat also

$$\text{I. } M_2(p) = 1 \qquad (p > n+\sigma_k).$$

Zweite Klasse. Primzahlen größer als $2\sigma_k$ sind in keiner Zahl des Dreiecks $\Delta(2\sigma_\varkappa)$ enthalten, sodaß für sie nur das Qua-

TAFEL 19. Das wirksame Dreieck der Folge $(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa)$

	$2\sigma_1$	$2\sigma_2$	. . .	$2\sigma_k$	$2n$	$2n+2\sigma_1$	. . .	$2n+2\sigma_\varkappa$	. . .	$2n+2\sigma_k$
$2\sigma_0$	$2w_{10}$	$2w_{20}$	. . .	$2w_{k0}$	$2n$	$2n+2w_{10}$	. . .	$2n+2w_{\varkappa 0}$	. . .	$2n+2w_{k0}$
$2\sigma_1$		$2w_{21}$	. . .	$2w_{k1}$	$2n-2w_{10}$	$2n$	. . .	$2n+2w_{\varkappa 1}$	. . .	$2n+2w_{k1}$
. . .			. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . . .	. . . .	. . . . .	. . . .
$2\sigma_\lambda$			. . .	$2w_{k\lambda}$	$2n-2w_{\lambda 0}$	$2n-2w_{\lambda 1}$	. . .	$2n+2w_{\varkappa\lambda}$	. . .	$2n+2w_{k\lambda}$
. . .			. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . . .	. . . .	. . . . .	. . . .
$2\sigma_{k-1}$				$2w_{k,k-1}$	$2n-2w_{k-1,0}$	$2n-2w_{k-1,1}$	. . .	$2n-2w_{k-1,\varkappa}$	. . .	$2n+2w_{k,k-1}$
$2\sigma_k$					$2n-2w_{k0}$	$2n-2w_{k1}$	. . .	$2n-2w_{k\varkappa}$	. . .	$2n$
$2n$						$2w_{10}$	. . .	$2w_{\varkappa 0}$	. . .	$2w_{k0}$
$2n+2\sigma_1$							. . .	$2w_{\varkappa 1}$	. . .	$2w_{k1}$
. . .							. . . .	. . . .	. . . . .	. . . .
$2n+2\sigma_{k-1}$										$2w_{k,k-1}$

TAFEL 20

Verteilung der Primzahlen erster und zweiter Art auf die dritte und vierte Klasse für die Gewichte 2 bis 12

$(2\delta_\varkappa)$	k	$2k+2$	σ_k	$2\sigma_k$	$\sigma_k < p < 2\sigma_k$		$p \leq \sigma_k$	
					2.	1.	2.	1.
2	1	4	1	2	—	—	—	—
4	1	4	2	4	—	3	—	—
6	1	4	3	6	5	—	—	3
2, 4	2	6	3	6	—	5	—	3
8	1	4	4	8	7, 5	—	—	3
2, 6	2	6	4	8	7	5	—	3
2, 4, 2	3	8	4	8	—	7, 5	—	3
10	1	4	5	10	7	—	5	3
4, 6	2	6	5	10	7	—	—	5, 3
4, 2, 4	3	8	5	10	—	7	—	5, 3
12	1	4	6	12	11, 7	—	5	3
6, 6	2	6	6	12	11, 7	—	—	5, 3
2, 4, 6	3	8	6	12	11	7	—	5, 3
2, 6, 4	3	8	6	12	11	7	—	5, 3
4, 2, 6	3	8	6	12	11	7	—	5, 3
2, 4, 2, 4	4	10	6	12	11	7	—	5, 3

drat $Q(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa)$ in Betracht kommt. Die Zahlen des Quadrats liegen zwischen $2n-2\sigma_k$ und $2n+2\sigma_k$, sind also einem Abschnitt von $2\sigma_k+1$ geraden Zahlen entnommen. Weil p größer als $2\sigma_k$ ist, hat höchstens eine der Zahlen $2n\pm 2a$ $(0\leq 2a<p)$ den Teiler p. Gibt es im Quadrat keine solche Zahl, so ist wieder $M_2(p)=1$. Ist $2n$ selbst durch p teilbar, so wird

$$z(p) = k \text{ und } M_2(p) = \frac{p-k-1}{p-2k-2} = 1 + \frac{k+1}{p-2k-2}.$$

Ist im Quadrat $2n-2a$ oder $2n+2a$ durch p teilbar, so hat man festzustellen, wie oft die Zahl $2a$ unter den Zahlen $2w_{\varkappa\lambda}$ vorkommt; jedesmal, wenn die Gleichung $2w_{\varkappa\lambda}=2a$ gilt, erhält man eine Zeile des Quadrats, die eine durch p teilbare Zahl enthält, und weil die Zahlen einer Zeile einem Abschnitt von σ_k+1 geraden Zahlen entnommen sind, kann höchstens eine von ihnen durch p teilbar sein; mithin enthält das Dreieck $\Delta(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa)$ so viel mit dem Primteiler p behaftete Zeilen, als die Zahl $2a$ im Dreieck $\Delta(2\sigma_\varkappa)$ vorkommt. Um den Fall $2a=0$ zu umfassen, braucht man nur das Dreieck $\Delta'(2\sigma_\varkappa)$ der Zahlen $2w'_{\varkappa\lambda}$ zu betrachten. Wird demnach die Anzahl der Zahlen des Dreiecks $\Delta'(2\sigma_\varkappa)$, die gleich $2a$ sind, mit $y(2a)$ bezeichnet, so ist $z(p)=2k+1-y(2a)$, und das gilt auch für $2a=0$, weil $y(0)=k+1$ wird. Man erhält jetzt die Gleichungen

$$\text{(II)} \begin{cases} M_2(p)=1, \text{ wenn keine der Zahlen } 2n\pm 2w'_{\varkappa\lambda} \text{ durch } p \text{ teilbar,} \\ M_2(p) = \dfrac{p-y(2a)-2k-2}{p-2k-2} = 1 + \dfrac{y(2a)}{p-2k-2}, \text{ wenn } 2n-2a \\ \qquad \text{oder } 2n+2a \text{ durch } p \text{ teilbar ist.} \end{cases}$$

Es ist zu beachten, daß derselbe Multiplikator herauskommt, gleichgültig, ob $2n-2a$ oder $2n+2a$ den Teiler p besitzt.

Der größte Wert des Multiplikators ergibt sich, wenn $2n$ selbst den Teiler p hat; denn wenn $2a>0$ ist, wird $y(2a)\leq k$. Die obere Schranke k ist verwirklicht, wenn alle Differenzen $2\delta_\varkappa$ gleich $2a$ sind, denn alsdann hat man

$$(194) \qquad 2w_{10} = 2w_{21} = \cdots = 2w_{\lambda,\lambda-1} = \cdots = 2w_{k,k-1} = 2a.$$

Wie in § 19 gezeigt wurde, gibt es beständige Folgen, deren k Glieder alle gleich $2a$ sind, wenn man nämlich $2a=2P_R$ setzt, wo, wie früher, $p_R\leq k+1<p_{R+1}$ ist. Daß nur für solche Folgen $y(2a)=k$ wird, erkennt man so. Wenn man die Zeilen des Dreiecks $\Delta(2\sigma_\varkappa)$ durchläuft, sei zuerst $2w_{\varkappa\lambda}=2a$, also $2\sigma_\varkappa=2a+2\sigma_\lambda$. Ist in einer der folgenden Zeilen $2w_{\mu\nu}=2a$, also $2\sigma_\mu=2a+2\sigma_\nu$,

so ist wegen $\nu > \lambda$ auch $\mu > \varkappa$, das heißt, $2w_{\mu\nu}$ steht in einer späteren Spalte als $2w_{\varkappa\lambda}$. So geht es weiter. Wenn daher alle k Zeilen des Dreiecks $\Delta(2\sigma_\varkappa)$ die Zahl $2a$ enthalten sollen, so muß immer das erste Element in ihnen gleich $2a$ sein, und das besagen die Gleichungen (194).

Dritte Klasse. Auch die Primzahlen der dritten Klasse können im Dreieck $\Delta(2\sigma_\varkappa)$ nicht als Teiler auftreten. In einer Zeile des Quadrats $Q(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa)$ findet sich eine solche Primzahl höchstens einmal als Teiler; denn in einem Abschnitt von σ_k+1 geraden Zahlen kann höchstens eine durch $p \geqq \sigma_k+1$ teilbar sein. Hat keine der Zahlen $2n \pm 2w'_{\varkappa\lambda}$ den Teiler p, so ist wieder $M_2(p)=1$. Ist $2n$ selbst durch p teilbar, so ist

$$z(p)=k \quad \text{und} \quad M_2(p)=\frac{p-k-1}{p-2k-2}=1+\frac{k+1}{p-2k-2}\,.$$

Ist $2n-2a$ durch p teilbar, $0<2a<p$, so gilt dasselbe von $2n+(2p-2a)$, und ist $2n+2a$ durch p teilbar, so gilt dasselbe von $2n-(2p-2a)$. Die Zahlen $2n\pm(2p-2a)$ kommen nur in Betracht, wenn $2p-2a \leqq 2\sigma_k$ ist; hieraus folgt $a \geqq p-\sigma_k$, und das ist mit den Bedingungen $2a<p$ und $p<2\sigma_k$ verträglich. Ist zum Beispiel $p=23$ und $\sigma_k=12$, so darf man $2a=22$ nehmen, und es wird $2p-2a=24$; dagegen wird für $2a=20$ schon $2p-2a=26>2\sigma_k$. Außer den Zahlen $2n\pm 2a$ können also auch die Zahlen $2n\mp(2p-2a)$ unter den Zahlen $2n\pm 2w'_{\varkappa\lambda}$ vorkommen und den Primteiler p liefern. Damit sind aber alle Zahlen $2n\pm 2w'_{\varkappa\lambda}$ erschöpft, die den Teiler p haben, denn bereits $4p-2a$ wird größer als $3p$ und erst recht als $2\sigma_k$. Bedenkt man noch, daß $y(0)=k+1$ und $y(2p)=0$ ist, so wird allgemein $z(p)=2k+1-y(2a)-y(2p-2a)$, und es ergeben sich schließlich die Gleichungen

$$(\mathrm{III}_1)\quad M_1(p')=p'+y(2a)+y(2p'-2a)-(2k+2) \qquad (p'<2k+2)\,;$$

$$(\mathrm{III}_2)\left\{\begin{array}{l} M_2(p'')=1, \text{ wenn keine der Zahlen } 2n\pm 2w'_{\varkappa\lambda} \text{ durch } p'' \text{ teilbar,} \\[2ex] M_2(p'')=\dfrac{p''+y(2a)+y(2p''-2a)-2k-2}{p''-2k-2}=1+\dfrac{y(2a)+y(2p''-2a)}{p''-2k-2}, \\[2ex] \qquad \text{wenn } 2n-2a \text{ oder } 2n+2a \text{ durch } p'' \text{ teilbar ist.} \end{array}\right.$$

Auch hier macht es keinen Unterschied, ob $2n-2a$ oder $2n+2a$ den Teiler p besitzt. Für Beispiele sei auf den nächsten Paragraphen verwiesen.

Vierte Klasse. Wenn $p \leq \sigma_k$ ist, können Zahlen des Dreiecks $\Delta(2\sigma_\varkappa)$ durch p teilbar sein, und man hat zuerst in ihm die Anzahl $\zeta(p)$ der von p freien Zeilen festzustellen. Das untere Dreieck im Dreieck $\Delta(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa)$ liefert dann zu $z(p)$ den ersten Beitrag $\zeta(p)$. Den zweiten Beitrag liefern die ersten $k+1$ Zeilen dieses Dreiecks. Ist keine der Zahlen $2n \pm 2w'_{\varkappa\lambda}$ durch p teilbar, so ist der zweite Beitrag $\zeta(p)+1$, und es wird $z(p)=2\zeta(p)+1$. Ist $2n$ selbst durch p teilbar, so ist der zweite Beitrag gleich Null, und es wird $z(p)=\zeta(p)$. Ist $2n$ nicht durch p teilbar, wohl aber mindestens eine der Zahlen $2n \pm 2w'_{\varkappa\lambda}$, so kann man zunächst nur schließen, daß $z(p)$ zwischen $\zeta(p)$ und $2\zeta(p)+1$ liegt, die Grenzen eingeschlossen. Um $z(p)$ zu ermitteln, muß man auch die Zahlen des Quadrats $Q(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa)$ auf ihre Teilbarkeit durch p untersuchen, und jetzt kann in einer Zeile mehr als eine durch p teilbare Zahl vorkommen.

Ebenso wie in § 21 die Tafel 17 des großen wirksamen Dreiecks zur Berechnung der Schwankungsfunktion $S(2\sigma_\varkappa)$ aufgestellt wurde, dient zur Bestimmung des Charakters, der dem Quadrat $Q(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa)$ bezüglich der ungeraden Primzahlen innewohnt, das große wirksame Quadrat (Tafel 21).

Oberhalb der von links oben nach rechts unten laufenden Hauptdiagonale findet man das wirksame Dreieck der Tafel 16. In der Diagonale steht das Zeichen p und besagt, daß für diese Felder jede ungerade Primzahl als Primteiler (der Null) aufzufassen ist. Die Zeilen des Dreiecks sind aber nach links fortgesetzt worden, so zwar, daß das Feld mit dem Eingang (2α) der Spalte und (2β) der Zeile, $\alpha<\beta$, die ungeraden Primteiler der Zahl $2\beta-2\alpha$ enthält. Hieraus folgt, daß in Feldern, die symmetrisch zur Hauptdiagonale liegen, dieselben Primteiler stehen.

Um das große wirksame Quadrat für den Primteiler p auf das Quadrat $Q(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa)$ anzuwenden, denke man sich, wie beim großen wirksamen Dreieck, zuerst alle Zeilen und alle Spalten jede für sich zugedeckt. Die Zeile mit dem Eingang $(2\sigma_\lambda)$ enthält in der Spalte mit dem Eingang $(2\sigma_\varkappa)$ die Primteiler der Zahl $\pm 2w'_{\varkappa\lambda}$; das Pluszeichen gilt, wenn $\varkappa>\lambda$, das Minuszeichen, wenn $\varkappa<\lambda$ ist. Mithin enthält dieselbe Zeile in der Spalte mit

TAFEL 21. Der Anfang des großen wirksamen Quadrats

	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72	
0	p	—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11	3	13	7	3, 5	—	17	3	19	5	3, 7	11	23	3	5	13	3	7	29	3, 5	31	—	3, 11	3	5, 7	3	**0**
2	—	p	—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11	3	13	7	3, 5	—	17	3	19	5	3, 7	11	23	3	5	13	3	7	29	3, 5	31	—	3, 11	3	5, 7	**2**
4	—	—	p	—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11	3	13	7	3, 5	—	17	3	19	5	3, 7	11	23	3	5	13	3	7	29	3, 5	31	—	3, 11	3	**4**
6	3	—	—	p	—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11	3	13	7	3, 5	—	17	3	19	5	3, 7	11	23	3	5	13	3	7	29	3, 5	31	—	3, 11	**6**
8	—	3	—	—	p	—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11	3	13	7	3, 5	—	17	3	19	5	3, 7	11	23	3	5	13	3	7	29	3, 5	31	—	**8**
10	5	—	3	—	—	p	—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11	3	13	7	3, 5	—	17	3	19	5	3, 7	11	23	3	5	13	3	7	29	3, 5	31	**10**
12	3	5	—	3	—	—	p	—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11	3	13	7	3, 5	—	17	3	19	5	3, 7	11	23	3	5	13	3	7	29	3, 5	**12**
14	7	3	5	—	3	—	—	p	—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11	3	13	7	3, 5	—	17	3	19	5	3, 7	11	23	3	5	13	3	7	29	**14**
16	—	7	3	5	—	3	—	—	p	—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11	3	13	7	3, 5	—	17	3	19	5	3, 7	11	23	3	5	13	3	7	**16**
18	3	—	7	3	5	—	3	—	—	p	—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11	3	13	7	3, 5	—	17	3	19	5	3, 7	11	23	3	5	13	3	**18**
20	5	3	—	7	3	5	—	3	—	—	p	—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11	3	13	7	3, 5	—	17	3	19	5	3, 7	11	23	3	5	13	**20**
22	11	5	3	—	7	3	5	—	3	—	—	p	—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11	3	13	7	3, 5	—	17	3	19	5	3, 7	11	23	3	5	**22**
24	3	11	5	3	—	7	3	5	—	3	—	—	p	—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11	3	13	7	3, 5	—	17	3	19	5	3, 7	11	23	3	**24**
26	13	3	11	5	3	—	7	3	5	—	3	—	—	p	—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11	3	13	7	3, 5	—	17	3	19	5	3, 7	11	23	**26**
28	7	13	3	11	5	3	—	7	3	5	—	3	—	—	p	—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11	3	13	7	3, 5	—	17	3	19	5	3, 7	11	**28**
30	3, 5	7	13	3	11	5	3	—	7	3	5	—	3	—	—	p	—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11	3	13	7	3, 5	—	17	3	19	5	3, 7	**30**
32	—	3, 5	7	13	3	11	5	3	—	7	3	5	—	3	—	—	p	—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11	3	13	7	3, 5	—	17	3	19	5	**32**
34	17	—	3, 5	7	13	3	11	5	3	—	7	3	5	—	3	—	—	p	—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11	3	13	7	3, 5	—	17	3	19	**34**
36	3	17	—	3, 5	7	13	3	11	5	3	—	7	3	5	—	3	—	—	p	—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11	3	13	7	3, 5	—	17	3	**36**
38	19	3	17	—	3, 5	7	13	3	11	5	3	—	7	3	5	—	3	—	—	p	—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11	3	13	7	3, 5	—	17	**38**
40	5	19	3	17	—	3, 5	7	13	3	11	5	3	—	7	3	5	—	3	—	—	p	—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11	3	13	7	3, 5	—	**40**
42	3, 7	5	19	3	17	—	3, 5	7	13	3	11	5	3	—	7	3	5	—	3	—	—	p	—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11	3	13	7	3, 5	**42**
44	11	3, 7	5	19	3	17	—	3, 5	7	13	3	11	5	3	—	7	3	5	—	3	—	—	p	—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11	3	13	7	**44**
46	23	11	3, 7	5	19	3	17	—	3, 5	7	13	3	11	5	3	—	7	3	5	—	3	—	—	p	—	—	3	—	5	3	7	—	3	5	11	3	13	**46**

dem Eingang $(2\sigma_\varkappa + 2a)$ die Primteiler der Zahl $\pm 2w'_{\varkappa\lambda} + 2a$. Jetzt sei $2n - 2a$ durch p teilbar. Um festzustellen, welche der Zahlen $2n \pm 2w'_{\varkappa\lambda} = 2n - 2a + (\pm 2w'_{\varkappa\lambda} + 2a)$ den Teiler p besitzen, hat man demnach die $k+1$ Spalten mit den Eingängen $(2\sigma_\varkappa + 2a)$ aufzudecken und von den Zeilen diejenigen freizumachen, denen die Eingänge $(2\sigma_\varkappa)$ zukommen. Wenn man noch die aufgedeckten Zeilen und Spalten aneinander schiebt, so entsteht ein Quadrat von $(k+1)^2$ Feldern, das für die entsprechenden Felder des Quadrats $Q(2\sigma_\varkappa, 2n + 2\sigma_\varkappa)$ angibt, ob sie den Primteiler p aufweisen.

In vielen Fällen ist es jedoch nicht nötig, das ganze Quadrat herzustellen. Um nämlich den Beitrag zu ermitteln, den die ersten $k+1$ Zeilen des Dreiecks $\Delta(2\sigma_\varkappa, 2n + 2\sigma_\varkappa)$ zur Funktion $z(p)$ liefern, hat man dem Quadrat $Q(2\sigma_\varkappa, 2n + 2\sigma_\varkappa)$ noch das obere Dreieck $\Delta(2\sigma_\varkappa)$ hinzuzufügen und darin vermöge des großen wirksamen Dreiecks die Zahlen $2w_{\varkappa\lambda}$ durch ihre ungeraden Primteiler zu ersetzen. Dann kommen von dem Quadrat nur diejenigen Zeilen in Betracht, die im Dreieck $\Delta(2\sigma_\varkappa)$ von p frei sind. Wenn also sämtliche Zeilen dieses Dreiecks p enthalten, so genügt es, allein die $(k+1)$-te Zeile zu berücksichtigen. Nur wenn sämtliche Zeilen des Dreiecks von p frei sind, muß man das volle Quadrat nehmen, hat dann aber mit dem Dreieck nichts mehr zu tun.

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich daraus, daß eine Zeile, deren Eingang mit einem der Eingänge der Spalten übereinstimmt, notwendig den Primteiler p enthält, nämlich an der Kreuzungsstelle; folglich dürfen auch solche Zeilen von vornherein weggelassen werden.

Der Fall, daß $2n + 2a$ durch p teilbar ist, läßt sich sofort auf den soeben betrachteten Fall, daß $2n - 2a$ den Teiler p besitzt, zurückführen, wenn man darauf verzichtet, daß $2a$ kleiner als p sein soll, und für $2a$ alle p geraden Reste gegen $2p$ nimmt, oder vielmehr diejenigen geraden Reste, die bei den Zahlen $2w'_{\varkappa\lambda}$ auftreten.

Zwischen den beiden Quadraten, die man erhält, wenn $2n-2a$ und wenn $2n - (2p - 2a)$ und damit $2n + 2a$ durch p teilbar ist, besteht eine einfache Beziehung. Sind nämlich im ersten Quadrat zwei zur Hauptdiagonale symmetrische Felder, die also zu zwei Zahlen $\pm 2w'_{\varkappa\lambda} + 2a$ gehören, frei von p, so gilt dasselbe für das zweite Quadrat, weil hier zu denselben Feldern die zwei Zahlen $\pm 2w'_{\varkappa\lambda} + 2p - 2a = 2p - (\mp 2w'_{\varkappa\lambda} + 2a)$ gehören. Ist aber beim ersten

Quadrat eines der beiden symmetrischen Felder mit p besetzt und dann notwendig das andere von p frei, so vertauschen die beiden Felder beim zweiten Quadrat ihre Rolle, das heißt, das zweite Quadrat entsteht aus dem ersten, indem man es an der Hauptdiagonale spiegelt.

Nachdem man die ersten $k+1$ Zeilen des Dreiecks $\Delta(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa)$ auf die angegebene Art durch eine gewisse Anzahl von Zeilen des Quadrats ersetzt hat, das aus dem großen wirksamen Quadrat hervorgegangen ist, muß abgezählt werden, wieviel Zeilen von p frei sind. Diese Anzahl werde mit $x(2a, p)$ bezeichnet. Dann gelten die Gleichungen

$$(\mathrm{IV}_1)\begin{cases} M_1(p') = p' - 2\zeta(p') - 2, \text{ wenn keine der Zahlen } 2n \pm 2w'_{\varkappa\lambda} \\ \qquad \text{durch } p' \text{ teilbar,} \\ M_1(p') = p' - \zeta(p') - x(2a, p') - 1, \text{ wenn } 2n - 2a \text{ durch } p' \\ \qquad \text{teilbar ist;} \end{cases}$$

$$(\mathrm{IV}_2)\begin{cases} M_2(p'') = \dfrac{p'' - 2\zeta(p'') - 2}{p'' - 2k - 2} = 1 + \dfrac{2k - 2\zeta(p'')}{p'' - 2k - 2}, \text{ wenn keine der} \\ \qquad \text{Zahlen } 2n \pm 2w'_{\varkappa\lambda} \text{ durch } p'' \text{ teilbar,} \\ M_2(p'') = \dfrac{p'' - \zeta(p'') - x(2a, p'') - 1}{p'' - 2k - 2} = 1 + \dfrac{2k + 1 - \zeta(p'') - x(2a, p'')}{p'' - 2k - 2}, \\ \qquad \text{wenn } 2n - 2a \text{ durch } p'' \text{ teilbar ist.} \end{cases}$$

Wie sich die Durchführung des Verfahrens im einzelnen gestaltet, soll im folgenden Paragraphen an einigen Beispielen gezeigt werden.

§ 25

Beispiele für die Berechnung von Schwankungsfunktionen

Beispiel I: Die Doppeldarstellungen der geraden Zahlen als Summen mittels Primzahlpaaren gegebener Differenz.

Die Differenzenfolge sei (2δ); dann ist die Folge der Teilsummen $(0, 2\delta)$, also $k=1$. Demnach wird

$$(195) \qquad G^{(0,2\delta)}(2n) \sim A_3 \cdot \frac{(\pi(2n))^4}{(2n)^3} \cdot S(0, 2\delta, 2n, 2n+2\delta).$$

Die Konstante A_3 hat den Wert 4,153. Zur Berechnung der Schwankungsfunktion hat man das wirksame Dreieck zu bilden:

2δ	$2n$	$2n+2\delta$
	$2n-2\delta$	$2n$
		2δ

Primzahl erster Art ist nur 3. Es ist zu unterscheiden, ob 2δ durch 3 teilbar ist, oder nicht.

1. 2δ ist nicht durch 3 teilbar. Dann ist immer eine und nur eine der drei Zahlen $2n, 2n \pm 2\delta$ durch 3 teilbar. Ist $2n$ durch 3 teilbar, so wird $M_1(3)=1$; ist es nicht durch 3 teilbar, so wird $M_1(3)=0$. Mithin gestatten nur die durch 6 teilbaren Zahlen die verlangte Darstellung, im Einklang damit, daß 3 für die Folge $(0, 2\delta)$ Maximalcharakter hat.

2. 2δ ist durch 3 teilbar. Ist dann auch $2n$ durch 3 teilbar, so wird $M_1(3)=2$; ist es nicht durch 3 teilbar, so wird $M_1(3)=1$. Mithin gestatten die durch 3 teilbaren geraden Zahlen asymptotisch doppelt soviel Darstellungen der verlangten Art, als die nicht durch 3 teilbaren geraden Zahlen.

Primzahlen zweiter Art größer als $n+\delta$ sind unwirksam. Ist eine Primzahl zweiter Art p kleiner als $n+\delta$ und kein Teiler von δ, so wird

$M_2(p) = 1$, wenn keine der drei Zahlen $2n, 2n \pm 2\delta$ durch p teilbar,

$M_2(p) = \dfrac{p-3}{p-4}$, wenn eine der beiden Zahlen $2n-2\delta$ und $2n+2\delta$ durch p teilbar,

$M_2(p) = \dfrac{p-2}{p-4}$, wenn $2n$ durch p teilbar ist.

Ist eine Primzahl q zweiter Art kleiner als $n+\delta$ und Teiler von δ, so wird

$$M_2(q) = \frac{q-2}{q-4}, \text{ wenn } 2n \text{ nicht durch } q \text{ teilbar,}$$

$$M_2(q) = \frac{q-1}{q-4}, \text{ wenn } 2n \text{ durch } q \text{ teilbar ist.}$$

Hiernach läßt sich die Schwankungsfunktion $S(0,2\delta,2n,2n+2\delta)$ aus den Multiplikatoren $M_1(3)$, $M_2(p)$ und $M_2(q)$ zusammensetzen.

Es wäre zu wünschen, daß, ähnlich wie es WEINREICH bei der Funktion $G^{(0,2)}(2n)$ für den Bereich von 15606 bis 15900 durchgeführt hat, auch bei den höheren G-Funktionen, etwa zunächst für $G^{(0,30)}(2n)$, die wahren Werte bei hinreichend großen Werten von $2n$ mit den Näherungswerten verglichen würden; das Verfahren der Doppelstreifen, das WEINREICH angewandt hat (vgl. Teil I, § 8), würde auch hier zu empfehlen sein, mit der Abänderung, daß nur die Symmetriezentra der Folgen auf den Streifen in kleinerem Maßstabe dargestellt werden.

BEISPIEL II: Die vierfachen Darstellungen der durch 30 teilbaren Zahlen als Summen mittels der Primzahlvierlinge.

Die Differenzenfolge ist $(2,4,2)$, die Folge der Teilsummen $(0,2,6,8)$, also $k=3$. Demnach wird

$$(196)\quad G^{(0,2,6,8)}(2n) \sim A_7 \cdot \frac{(\pi(2n))^8}{(2n)^7} \cdot S(0,2,6,8,2n,2n+2,2n+6,2n+8).$$

Die Konstante A_7 hat den Wert 148,9 (vgl. Teil II, S. 21)[1].

Bei der Berechnung der Schwankungsfunktion hat man als Primzahlen erster Klasse diejenigen, die größer als $n+4$ sind; sie sind unwirksam. Die Primzahlen zweiter Klasse liegen zwischen 8 und $n+4$; es sind also die Primzahlen $11, 13, 17, \ldots$. Nach den Formeln (II) in § 24 wird

[1] In der dort angegebenen Formel (102) ist die Zahl l so zu wählen, daß $p_{l-1}-(\mu+1)$ negativ, dagegen $p_l-(\mu+1)$ positiv ausfällt; hiernach ist der Zusatz zu dieser Formel zu verbessern.

$M_2(p'') = 1$, wenn keine der Zahlen $2n, 2n \pm 2, 2n \pm 4, 2n \pm 6, 2n \pm 8$ durch p'' teilbar,

$M_2(p'') = \dfrac{p'' + y(2a) - 8}{p'' - 8} = 1 + \dfrac{y(2a)}{p'' - 8}$, wenn $2n \pm 2a$ durch p'' teilbar ist.

Das Dreieck $\Delta'(0, 2, 6, 8)$ ist

0	2	6	8
	0	4	6
		0	2
			0

Demnach wird für

$$2a = 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8$$
$$y(2a) = 4,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1\,,$$

und man erhält als Multiplikatoren

$M_2(p'') = \dfrac{p'' - 4}{p'' - 8}$, wenn $2n$ durch p'' teilbar,

$M_2(p'') = \dfrac{p'' - 6}{p'' - 8}$, wenn eine der Zahlen $2n \pm 2$, $2n \pm 6$ durch p'' teilbar,

$M_2(p'') = \dfrac{p'' - 7}{p'' - 8}$, wenn eine der Zahlen $2n \pm 4, 2n \pm 8$ durch p'' teilbar ist,

ganz in Übereinstimmung mit den Formeln in § 17 (Teil II, S. 47).

Primzahlen dritter Klasse sind 7 und 5; sie sind erster Art (vgl. Tafel 20), sodaß die Formel (II_1) anzuwenden ist. Für die Primzahl 7 hat man

$$2a = 0,\ 2,\ 4,\ 6; \qquad 14 - 2a = 14,\ 12,\ 10,\ 8$$
$$y(2a) = 4,\ 2,\ 1,\ 2; \quad y(14 - 2a) = 0,\ 0,\ 0,\ 1.$$

Folglich wird

$M_1(7) = 3$, wenn 2n durch 7 teilbar,

$M_1(7) = 1$, wenn eine der Zahlen $2n \pm 2$ durch 7 teilbar,

$M_1(7) = 0$, wenn eine der Zahlen $2n \pm 4$ durch 7 teilbar,

$M_1(7) = 2$, wenn eine der Zahlen $2n \pm 6$ und damit gleichzeitig eine der Zahlen $2n \mp 8$ durch 7 teilbar ist.

Für die Primzahl 5 kommen nur die Reste $0, 2, 4$ in Betracht; man hat

$$2a = 0,\ 2,\ 4; \qquad 10 - 2a = 10, 8, 6$$
$$y(2a) = 4,\ 2,\ 1; \quad y(10-2a) = \ 0, 1, 2.$$

Folglich wird

$M_1(5) = 1$, wenn $2n$ durch 5 teilbar,

$M_1(5) = 0$, wenn eine der Zahlen $2n \pm 2$, $2n \pm 4$ durch 5 teilbar ist.

Primzahl vierter Klasse ist endlich 3; sie ist erster Art. Nach dem in § 24 auseinandergesetzten Verfahren hat man zunächst das Dreieck $\Delta(0, 2, 6, 8)$ auf die Teilbarkeit durch 3 zu untersuchen; man findet

—	3	—
	—	3
		—

Mithin kommen von dem Quadrat nur die Zeilen mit den Eingängen 6 und 8 in Betracht. Aus dem großen wirksamen Quadrat oder unmittelbar durch Differenzenbildung erhält man das Schema

	$2a = 0$				$2a = 2$				$2a = 4$			
	0	2	6	8	2	4	8	10	4	6	10	12
6	3	—	3	—	—	—	—	—	—	3	—	3
8	—	3	—	3	3	—	3	—	—	—	—	—

Man hat $\zeta(3)=1$ und daher $M_1(3)=1-x(2a,3)$. Nach dem Schema wird

$$x(0,3)=0,\ \ x(2,3)=1,\ \ x(4,3)=1,$$

sodaß

$M_1(3)=1$, wenn $2n$ durch 3 teilbar,

$M_1(3)=0$, wenn eine der Zahlen $2n\pm 2$ durch 3 teilbar ist;

das sind die alten Formeln, die man leicht durch unmittelbare Untersuchung des Dreiecks $\Delta(2,6,8,2n,2n+2,2n+6,2n+8)$ bestätigt.

BEISPIEL III: Die fünffachen Darstellungen der geraden Zahlen als Summen mittels Primzahlfolgen der Differenzen 6, 12, 12, 6.

Die Differenzenfolge ist $(6,12,12,6)$, die Folge der Teilsummen $(0,6,18,30,36)$, also $k=4$, $2k+2=10$. Demnach wird

$$(197)\quad G^{(0,6,18,30,36)}(2n)\sim A_9\cdot\frac{(\pi(2n))^{10}}{(2n)^9}\cdot S(0,6,..,36,2n,2n+6,..,2n+36).$$

Bei der Berechnung der Schwankungsfunktion sind die Primzahlen erster Klasse diejenigen, die größer als $n+18$ sind; sie sind unwirksam. Die Primzahlen zweiter Klasse liegen zwischen 36 und $n+18$; es sind $37, 41, 43, \ldots$ Nach den Formeln (II) des § 24 wird

$M_2(p'')=1$, wenn keine der Zahlen $2n\pm 0,6,12,18,24,30,36$ durch p'' teilbar,

$$M_2(p'')=\frac{p''+y(2a)-10}{p''-10}=1+\frac{y(2a)}{p''-10},$$ wenn eine dieser Zahlen durch p'' teilbar ist.

Das Dreieck $\Delta'(0,6,18,30,36)$ hat jetzt die Gestalt

0	6	18	30	36
	0	12	24	30
		0	12	18
			0	6
				0

und es ist für

$$2a = 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36$$
$$y(2a) = 5, 2, 2, 2, 1, 2, 1.$$

Hieraus ergeben sich die Multiplikatoren für die Primzahlen der zweiten Klasse, bei denen beziehungsweise $2n \pm 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36$ durch p'' teilbar ist.

Die Primzahlen der dritten Klasse sind 19, 23, 29, 31; sie sind sämtlich zweiter Art. Man überzeugt sich leicht, daß, wenn $y(2a)$ von Null verschieden ist, immer $y(2p-2a)$ gleich Null ist; die Fälle, in denen $y(2p-2a)$ von Null verschieden ausfällt, zeigt die folgende Tafel:

$$\begin{array}{llllll} 2a = & 8, & 14, & 20, & 26, & 32; \\ y(38-2a) = & 2, & 1, & 2, & 2, & 2; \\ y(62-2a) = & 0, & 0, & 0, & 1, & 2; \end{array} \qquad \begin{array}{llllll} 2a = & 10, & 16, & 22, & 28, & 34 \\ y(46-2a) = & 1, & 2, & 1, & 2, & 2 \\ y(58-2a) = & 0, & 0, & 1, & 2, & 1. \end{array}$$

Hierdurch sind die Multiplikatoren $M_2(p'')$ bestimmt.

Bei den Primzahlen der vierten Klasse sind erster Art 3, 5, 7, zweiter Art 11, 13, 17. Zur Bestimmung von $\zeta(p)$ hat man das Dreieck

3	3	3, 5	3
	3	3	3, 5
		3	3
			3

Mithin ist für

$$p = 3, 5, 7, 11, 13, 17$$
$$\zeta(p) = 0, 2, 4, 4, 4, 4.$$

1. $p' = 3$. Es kommt nur die Zeile mit dem Eingang 36 in Betracht, und auch diese entfällt für $2a = 0$. Für $2a = 2$ und 4 bekommt man in keiner Spalte den Primteiler 3, und daher wird

$$x(0, 3) = 0, \quad x(2, 3) = 1, \quad x(4, 3) = 1,$$

daß heißt, es ist wegen $M_1(3) = 2 - x(2a, 3)$:

$$M_1(3) = 2, \text{ wenn } 2n \text{ durch } 3 \text{ teilbar,}$$

$$M_1(3) = 1, \text{ wenn } 2n \text{ nicht durch } 3 \text{ teilbar ist.}$$

2. $p' = 5$. Es kommen nur die Zeilen mit den Eingängen 18, 30, 36 in Betracht, und auch diese entfallen, wenn $2a = 0$ ist. Wie man dem großen wirksamen Quadrat entnimmt oder unmittelbar durch Differenzenbildung erkennt, lautet das Schema:

	$2a=2$					$2a=4$					$2a=6$					$2a=8$				
	2	8	20	32	38	4	10	22	34	40	6	12	24	36	42	8	14	26	38	44
18	—	5	—	—	5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5	—
30	—	—	5	—	—	—	5	—	—	5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
36	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5	—	—	5	—	—	—	5	—	—

Mithin wird

$$x(0,5) = 0, \quad x(2,5) = 1, \quad x(4,5) = x(6,5) = 2, \quad x(8,5) = 1,$$

das heißt, es ist wegen $M_1(5) = 2 - x(2a, 5)$:

$$M_1(5) = 2, \text{ wenn } 2n \text{ durch } 5 \text{ teilbar,}$$

$$M_1(5) = 1, \text{ wenn eine der Zahlen } 2n \pm 2 \text{ durch } 5 \text{ teilbar,}$$

$$M_1(5) = 0, \text{ wenn eine der Zahlen } 2n \pm 4 \text{ durch } 5 \text{ teilbar ist.}$$

Die Zahlen der Form $2n = 10\mu \pm 4$ sind also von der verlangten Darstellung ausgeschlossen.

3. Für die Primzahlen 7, 11, 13, 17 ist $\zeta(p) = 4$; man tut daher gut, sie gemeinschaftlich zu behandeln. Der Rest Null gibt immer $x(0, p) = 0$. An Stelle der von Null verschiedenen Reste $2a$ kann man die Zahlen $\pm 2w_{\varkappa\lambda}$, also ± 6, ± 12, ± 18, ± 24 nehmen. Für die sechs positiven Reste erhält man das Schema:

	$2a = 6$					$2a = 12$					$2a = 18$				
	6	12	24	36	42	12	18	30	42	48	18	24	36	48	54
0	—	—	—	—	7	—	—	—	7	—	—	—	—	—	—
6	p	—	—	—	—	—	—	—	—	7	—	—	—	7	—
18	—	—	—	—	—	—	p	—	—	—	p	—	—	—	—
30	—	—	—	—	—	—	—	p	—	—	—	—	—	—	—
36	—	—	—	p	—	—	—	—	—	—	—	—	p	—	—

	$2a = 24$					$2a = 30$					$2a = 36$				
	24	30	42	54	60	30	36	48	60	66	36	42	54	66	72
0	—	—	7	—	—	—	—	—	—	11	—	7	—	11	—
6	—	—	—	—	—	—	—	7	—	—	—	—	—	—	11
18	—	—	—	—	7	—	—	—	7	—	—	—	—	—	—
30	—	p	—	—	—	p	—	—	—	—	—	—	—	—	7
36	—	—	—	—	—	—	p	—	—	—	p	—	—	—	—

Die Schemata für die sechs negativen Reste entspringen hieraus durch Spiegelung an der Hauptdiagonale. Dabei bleibt die Anzahl der von einem Primteiler p freien Zeilen unverändert, und es ist daher $x(+2a, p) = x(-2a, p)$. Die Werte der Funktion $x(2a, p)$ sind

	6	12	18	24	30	36
7	2	1	2	2	1	2
11	3	3	3	4	2	2
13	3	3	3	4	3	4
17	3	3	3	4	3	4

Die Ermittlung der Multiplikatoren geht jetzt rasch vor sich. Für $p' = 7$ ist $M_1(7) = 2 - x(2a, 7)$, also

$M_1(7) = 2$, wenn $2n$ durch 7 teilbar,
$M_1(7) = 1$, wenn $2n \pm 2$ durch 7 teilbar,
$M_1(7) = 0$, wenn $2n \pm 4$, $2n \pm 6$ durch 7 teilbar ist.

Folglich entziehen sich auch die Zahlen der Formen $2n = 14\nu \pm 4$ und $2n = 14\nu \pm 6$ der gewünschten Darstellung.

Für die Primzahlen zweiter Art 11, 13, 17 ist

$$M_2(p'') = 1, \text{ wenn keine der Zahlen } 2n \pm 2w'_{\varkappa\lambda} \text{ durch } p'' \text{ teilbar,}$$

$$M_2(p'') = \frac{p'' - 5 - x(2a, p'')}{p'' - 10} = 1 + \frac{5 - x(2a, p'')}{p'' - 10}, \text{ wenn } 2n \pm 2a$$

durch p'' teilbar ist.

Die Aufstellung der Multiplikatoren für die einzelnen Fälle liegt auf der Hand.

§ 26

Weiterführung der Untersuchungen über den Zusammenhang zwischen den H- und U-Funktionen

Dem in § 21 eingeführten Zeichen $H_r^{(2\sigma_\varkappa)}(n_2; n_1)$ für die Anzahl der Lückenzahlfolgen r-ter Stufe, die mit einer Lückenzahl des Abschnitts von n_1 bis n_2 beginnen und Differenzen mit den Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ aufweisen, ist das Zeichen $U_r^{(2\sigma_\varkappa)}(n_2; n_1)$ an die Seite zu stellen, das sich auf Folgen mit Urdifferenzen bezieht. In diesem Paragraphen wird der Abschnitt von n_1 bis n_2 immer beibehalten werden, und es soll deshalb zur Abkürzung $H_r(2\sigma_\varkappa)$ und $U_r(2\sigma_\varkappa)$ geschrieben werden.

Wie in § 15 (Teil II, S. 32) gezeigt wurde, läßt sich jede H-Funktion als Summe gewisser U-Funktionen darstellen. Wenn man nämlich den $k+1$ Lückenzahlen r-ter Stufe mit den Differenzen $(2\delta_\varkappa)$ alle zwischen der Anfangs- und der Endzahl liegenden Lückenzahlen r-ter Stufe hinzufügt, so ergibt sich ein Abschnitt von Lückenzahlen, das heißt, man erhält lauter unmittelbar aufeinanderfolgende Lückenzahlen. Zu dem Abschnitt gehört eine Folge von Urdifferenzen $(2\delta'_\lambda)$, die aus k Abschnitten der Gewichte $2\delta_1, 2\delta_2, \ldots, 2\delta_k$ zusammengesetzt ist. Nimmt man aber umgekehrt irgendeinen Abschnitt von Lückenzahlen mit diesen Urdifferenzen $(2\delta'_\lambda)$, so ist darin eine Lückenzahlfolge mit den Differenzen $(2\delta_\varkappa)$ enthalten. Mithin wird

$$(130') \qquad H_r(2\sigma_\varkappa) = U_r(2\sigma_\varkappa) + \Sigma U_r(2\sigma'_\lambda).$$

Die Summe ist über alle Folgen von Urdifferenzen zu erstrecken, die aus den Differenzen $(2\delta_\varkappa)$ durch Zerlegung hervorgehen. Jeder solchen Zerlegung entspricht eine Gleichung

$$H_r(2\sigma'_\lambda) = U_r(2\sigma'_\lambda) + \Sigma U_r(2\sigma''_\mu), \tag{130''}$$

und es entsteht so ein System von Gleichungen, bei dem auf den linken Seiten die H-Funktionen für die k-gliedrige Folge $(2\delta_\varkappa)$, die $(k+1)$-gliedrigen Zerlegungen, die $(k+2)$-gliedrigen Zerlegungen usw. stehen, bis man schließlich bei unzerlegbaren Differenzenfolgen anlangt; bei diesen stehen auf der rechten Seite allein die entsprechenden U-Funktionen selbst. Wenn man die Reihe der Gleichungen rückwärts durchläuft, so wird (vgl. Teil II, S. 36) schließlich $U_r(2\sigma_\varkappa)$ eine lineare, homogene, ganzzahlige Funktion aller H-Funktionen, die zu den Zerlegungen der Folge $(2\delta_\varkappa)$ gehören; dabei hat $H_r(2\sigma_\varkappa)$ den Koeffizienten Eins. Es soll jetzt gezeigt werden, wie man den Ausdruck für $U_r(2\sigma_\varkappa)$ wirklich herstellen kann; dabei wird sich der in § 22 eingeführte Begriff der Erweiterung einer Folge von Teilsummen durch Einschieben als nützlich erweisen.

Statt die Differenzenfolgen zu zerlegen, kann man die Folgen der Teilsummen erweitern. Man erweitere zunächst die Folge $(2\sigma_\varkappa)$ durch eine Einschubzahl $2\varepsilon_1$, die von den Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ verschieden und kleiner als $2\sigma_k$ ist; das gibt, wenn $2\sigma_k - k = m$ gesetzt wird, m Möglichkeiten. Es ist erlaubt, alle hieraus entspringenden Differenzenfolgen zu den Zerlegungen der Folge $(2\delta_\varkappa)$ zu rechnen, wenn man festsetzt, daß das Zeichen $U_r(2\sigma'_\lambda)$ bei unzulässigen Folgen $(2\sigma'_\lambda)$ den Wert Null haben soll. Nunmehr erweitere man die Folge $(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1)$ durch Einschieben einer Zahl $2\varepsilon_2$, die von den Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ verschieden, größer als $2\varepsilon_1$ und kleiner als $2\sigma_k$ ist. Das gibt $\binom{m}{2}$ Möglichkeiten. So fortfahrend kommt man zu Folgen $(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \ldots, 2\varepsilon_i)$, in denen $2\varepsilon_1 < 2\varepsilon_2 < \cdots < 2\varepsilon_{i-1} < 2\varepsilon_i < 2\sigma_k$ ist; hierfür gibt es $\binom{m}{i}$ Möglichkeiten. Das Verfahren endet jedenfalls, wenn $i = m$ geworden ist. In Wirklichkeit braucht man nicht soweit zu gehen, weil bei einer zulässigen Differenzenfolge niemals zwei Zweier hintereinander vorkommen dürfen.

Auf die geschilderte Art entsteht die Gleichung

$$(198)\left\{\begin{aligned} H_r(2\sigma_\varkappa) = U_r(2\sigma_\varkappa) + \Sigma U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1) + \Sigma U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2) + \cdots \\ + \Sigma U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \ldots, 2\varepsilon_i) + \cdots, \end{aligned}\right.$$

und es ist umgekehrt

$$(199)\left\{\begin{aligned} U_r(2\sigma_\varkappa) = H_r(2\sigma_\varkappa) - \Sigma U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1) - \Sigma U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2) - \cdots \\ - \Sigma U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \ldots, 2\varepsilon_i) - \cdots. \end{aligned}\right.$$

Ebenso hat man für jeden zulässigen Wert von ε_1

$$(200)\left\{\begin{aligned} U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1) = H_r(2\sigma_k, 2\varepsilon_1) - \Sigma' U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2') - \cdots \\ - \Sigma' U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2', \ldots, 2\varepsilon_i') - \cdots. \end{aligned}\right.$$

Die gestrichenen Summen sind bei festem Wert von $2\varepsilon_1$ zu nehmen, und es erstreckt sich daher $\Sigma' U_r(2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2', \ldots, 2\varepsilon_i')$ nur über $\binom{m-1}{i-1}$ Summanden. Summiert man, um $\Sigma U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1)$ zu erhalten, auf der rechten Seite der Gleichung (200) über alle zulässigen Werte von $2\varepsilon_1$, so wird

$$(201)\quad \Sigma\Sigma' U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2', \ldots, 2\varepsilon_i') = i\cdot\Sigma U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \ldots, 2\varepsilon_i);$$

denn $2\varepsilon_1$ kann in einer Verbindung von i Einschubzahlen jede beliebige Stelle einnehmen, und die Doppelsumme besteht daher aus $\binom{m}{1}\cdot\binom{m-1}{i-1}$ Summanden, von denen immer je i einander gleich sind. Somit kommt

$$(202)\left\{\begin{aligned} \Sigma U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1) = \Sigma H_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1) - 2\Sigma U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2) - \cdots \\ - i\cdot\Sigma U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \ldots, 2\varepsilon_i) - \cdots, \end{aligned}\right.$$

und es wird

$$(203)\left\{\begin{aligned} U_r(2\sigma_\varkappa) = H_r(2\sigma_\varkappa) - \Sigma H_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1) + \Sigma U_r(2\sigma_\varkappa; 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2) \\ + 2\Sigma U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, 2\varepsilon_3) + \cdots + (i-1)\,\Sigma U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, \ldots, 2\varepsilon_i) + \cdots. \end{aligned}\right.$$

Weiter ist bei festen Werten von $2\varepsilon_1$ und $2\varepsilon_2$

$$(204)\begin{cases} U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2) = H_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2) - \Sigma'' U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, 2\varepsilon_3'') \\ -\Sigma'' U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, 2\varepsilon_3'', 2\varepsilon_4'') - \cdots - \Sigma'' U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, 2\varepsilon_3'', \ldots, 2\varepsilon_i'') - \cdots, \end{cases}$$

wo die zweimal gestrichenen Summen nur über je $\binom{m-2}{i-2}$ Summanden zu erstrecken sind. Summiert man über alle zulässigen Werte von $2\varepsilon_1$ und $2\varepsilon_2$, so wird

$$(205)\quad \Sigma\Sigma'' U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, 2\varepsilon_3'', \ldots, 2\varepsilon_i'') = \binom{i}{2} \cdot \Sigma U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, 2\varepsilon_3, \ldots, 2\varepsilon_i),$$

weil in der aus $\binom{m}{2} \cdot \binom{m-2}{i-2}$ Summanden bestehenden Doppelsumme jeweils $\binom{i}{2}$ Summanden einander gleich sind, und man erhält

$$(206)\begin{cases} \Sigma U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2) = \Sigma H_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2) - \binom{3}{2} \cdot \Sigma U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, 2\varepsilon_3) \\ -\binom{4}{2} \cdot \Sigma U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, \ldots, 2\varepsilon_4) - \cdots - \binom{i}{2} \cdot \Sigma U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, \ldots, 2\varepsilon_i) - \cdots. \end{cases}$$

Nunmehr wird

$$(207)\begin{cases} U_r(2\sigma_\varkappa) = H_r(2\sigma_\varkappa) - \Sigma H_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1) + \Sigma H_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2) \\ -\Sigma H_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, 2\varepsilon_3) - \binom{3}{2} \cdot \Sigma U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, \ldots, 2\varepsilon_4) - \cdots \\ -\binom{i-1}{2} \cdot \Sigma U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, \ldots, 2\varepsilon_i) - \cdots, \end{cases}$$

und jetzt ergibt der Schluß von i auf $i+1$ die Richtigkeit der allgemeinen Formel

$$(208)\begin{cases} U_r(2\sigma_\varkappa) = H_r(2\sigma_\varkappa) - \Sigma H_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1) + \Sigma H_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2) \\ -\Sigma H_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, 2\varepsilon_3) - \cdots + (-1)^i \Sigma H_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, \ldots, 2\varepsilon_i) + \cdots. \end{cases}$$

Die Summe hört auf, ehe $i=m$ geworden ist, wenn man die H-Funktionen wegläßt, die den Wert Null haben. Wieviel von Null verschiedene Glieder umfaßt sie? So viel als zulässige Differenzenfolgen aus den Folgen der Teilsummen entspringen, die auf der rechten Seite auftreten. Man wird so auf die Frage geführt, welches die größte Gliederzahl einer zulässigen Differenzenfolge gegebenen Gewichtes ist; sie ist die Umkehrung der in § 18 gestreiften Frage nach dem kleinsten Gewicht, das einer Folge von gegebener Gliederzahl zukommen kann. Eine Grenze, die sich als brauchbar erwiesen hat, ergibt sich, wenn man das Gewicht $2\sigma_k$ in der Form darstellt

$$(209) \qquad 2\sigma_k = \gamma_0 \cdot 2 + \gamma_1 \cdot 6 + \gamma_2 \cdot 30 + \cdots + \gamma_\varrho \cdot 2P_\varrho + \cdots + \gamma_r \cdot 2P_r$$

mit der Maßgabe, daß für $\varrho = 0, 1, 2, \ldots, r-1$ die Ungleichheiten $0 \leqq \gamma_\varrho \leqq p_{\varrho+1} - 1$ bestehen sollen; dagegen ist γ_r nur der Beschränkung unterworfen, daß es nicht negativ sein darf. Um die Gliederzahl möglichst groß zu machen, wird man die Folge aus möglichst vielen Urdifferenzen zusammensetzen. Es gibt aber in einem Abschnitt der Länge $2\sigma_k$ nur so viele aus Urdifferenzen hervorgehende Teilsummen, als darin Lückenzahlen vorkommen. Die Anzahl der Lückenzahlen r-ter Stufe in einem Abschnitt der Länge $2P_\varrho \left(\varrho \leqq r\right)$ ist sicher nicht größer als $P_\varrho^{(1)}$. Folglich ist die größte Gliederzahl einer Lückenzahlfolge r-ter Stufe des Gewichts $2\sigma_k$ nicht größer als

$$(210) \qquad \tau_k = \gamma_0 \cdot 1 + \gamma_1 \cdot 2 + \gamma_3 \cdot 8 + \cdots + \gamma_\varrho \cdot P_\varrho^{(1)} + \cdots + \gamma_r \cdot P_r^{(1)}.$$

Die Grenze läßt sich noch etwas herabdrücken, wenn $\gamma_\sigma = p_{\sigma+1} - 1$ oder $\gamma_0 \cdot 1 + \gamma_1 \cdot 8 + \cdots + \gamma_\sigma \cdot P_\sigma^{(1)} > P_{\sigma+1}^{(1)}$ ist, nämlich auf

$$(211) \qquad \tau_k' = \left(\gamma_{\sigma+1} + 1\right) \cdot P_{\sigma+1}^{(1)} + \gamma_{\sigma+2} \cdot P_{\sigma+2}^{(1)} + \cdots + \gamma_r \cdot P_r^{(1)}.$$

Wenn man umgekehrt die Gliederzahl $k+1$ in der Form (210) darstellt, so ist das Gewicht der Folge sicher nicht kleiner als die durch den Ausdruck (209) erklärte Zahl $2\sigma_k$.

Die vorhergehenden Betrachtungen gelten für beliebige Stufenzahlen r. Ist jedoch die gegebene Differenzenfolge unbeständig, so geht die Gleichung (208) von der R-ten Stufe ab in eine Identität über. Bei genügend hoher Stufenzahl sind also nur die beständigen Folgen zu berücksichtigen. Für solche Folgen kann man, wie es in den §§ 12 und 15 (Teil II, S. 18 und 37) geschehen ist, zu den Primzahlen übergehen; die entsprechenden Anzahlen werden durch Weglassen des Zeigers r bezeichnet. Wie am Schluß von § 21 bemerkt wurde, ist

$$H^{(2\sigma_\varkappa)}(n_2; n_1) \sim A_k \cdot \frac{(\pi(n_2-n_1))^{k+1}}{(n_2-n_1)^k} \cdot S(2\sigma_\varkappa) \tag{98'}$$

oder kürzer geschrieben

$$H(2\sigma_\varkappa) \sim W(2\sigma_\varkappa) \cdot S(2\sigma_\varkappa); \tag{98''}$$

$W(2\sigma_\varkappa)$ soll wieder als die Wachstumsfunktion bezeichnet werden.

Für die Folgen von Primzahlen mit den Urdifferenzen $(2\delta_\varkappa)$ läßt sich nach Gleichung (208) $U(2\sigma_\varkappa)$ durch H-Funktionen ausdrücken, und für diese kann man mittels der Gleichung (98″) asymptotische Ausdrücke einsetzen. Man erhält so einen asymptotischen Ausdruck für $U(2\sigma_\varkappa)$. Wird darin $W(2\sigma_\varkappa)$ vor die Klammer gesetzt, so erscheinen in der Klammer die Koeffizienten

$$B_{k+i} = \frac{A_{k+i}}{A_k} = \lim_{r=\infty} \frac{(2P_r)^i P_r^{(k+i+1)}}{(P_r^{(1)})^k P_r^{(k+1)}}; \tag{212}$$

die unendlichen Produkte auf der rechten Seite konvergieren, weil

$$\frac{p^i(p-k-i-1)}{(p-1)^i(p-k-1)} = 1 - \frac{\frac{1}{2}i(i-2k-1)p^{i-1} - \cdots}{p^{i+1} - (k+i+1)p^i + \cdots}$$

ist, und können zur unmittelbaren Erklärung der Größen B_{k+i} dienen. Nach dieser Vorbereitung wird

$$\left\{\begin{aligned} U(2\sigma_\varkappa) \sim W(2\sigma_\varkappa)\Bigg[S(2\sigma_\varkappa) &- B_{k+1} \cdot \frac{\pi(n_2-n_1)}{n_2-n_1} \cdot \Sigma S(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1) \\ &+ B_{k+2} \cdot \frac{\pi^2(n_2-n_1)}{(n_2-n_1)^2} \cdot \Sigma S(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2) - \cdots \\ &+ (-1)^i B_{k+i} \cdot \frac{\pi^i(n_2-n_1)}{(n_2-n_1)^i} \cdot \Sigma S(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \ldots, 2\varepsilon_i) + \cdots\Bigg]. \end{aligned}\right. \tag{213}$$

Die Gleichung (188) in § 22 ermöglicht es, schließlich auch $S(2\sigma_\varkappa)$ vor die Klammer zu setzen, denn hiernach ist

$$(188') \quad S(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \ldots, 2\varepsilon_i) = S(2\sigma_\varkappa) \cdot \Pi(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \ldots, 2\varepsilon_i);$$

der zweite Faktor ist ein Produkt, zu dessen Herstellung die Kenntnis der Funktion $z(p)$ für die Primzahlen $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_i$ genügt. Man erhält so die endgültige Formel

$$(214)\left\{\begin{aligned} U(2\sigma_\varkappa) \sim H(2\sigma_\varkappa)\Big[1 &- B_{k+1} \cdot \frac{\pi(n_2-n_1)}{n_2-n_1} \cdot \Sigma\Pi(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1) \\ &+ B_{k+2} \cdot \frac{\pi^2(n_2-n_1)}{(n_2-n_1)^2} \cdot \Sigma\Pi(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2) - \cdots \\ &+ (-1)^i B_{k+i} \cdot \frac{\pi^i(n_2-n_1)}{(n_2-n_1)^i} \cdot \Sigma\Pi(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \ldots, 2\varepsilon_i) + \cdots\Big]. \end{aligned}\right.$$

Für die asymptotische Darstellung der Funktion $U(2\sigma_\varkappa)$ war in § 15 (Teil II, S. 38) eine andere Formel (Gleichung 147) gegeben worden. Diese muß durch die Gleichung (214) ersetzt werden. Wenn man nämlich von den Lückenzahlen zu den Primzahlen übergeht, sind in der Gleichung (139) die Glieder der rechten Seite der Reihe nach mit den Potenzen der Dichtigkeit der Primzahlen $D_r^{k+1}, D_r^{k+2}, \ldots, D_r^{k+\nu}$ zu multiplizieren und dann ist der Grenzübergang auszuführen; irrtümlicherweise ist jedoch dort der Faktor D_r^{k+1} für alle Glieder genommen worden.

Der Nutzen der Gleichung (214) liegt darin, daß man aus den Primzahltafeln die Urdifferenzen der Primzahlen unmittelbar entnehmen und so die wahren Werte der U-Funktionen feststellen kann, während die Ermittlung der wahren Werte der H-Funktionen ein mühsames Geschäft ist. Vergleicht man nun die wahren Werte der U-Funktionen mit den Näherungswerten, die sich ergeben, wenn man auf der rechten Seite der Gleichung (208) die H-Funktionen durch die Näherungsausdrücke (98') ersetzt, so gewinnt man damit zugleich eine Prüfung der Formel (98'). Über die Rechnungen, die Weinreich für die U-Funktionen ausgeführt hat, soll im nächsten Paragraphen berichtet werden.

§ 27

Numerische Bestätigungen der Näherungsformeln für die U-Funktionen

Weinreich hat durch Abzählen die wahren Werte der Funktionen $U(0,2), U(0,4), \ldots, U(0,14)$ der Reihe nach für die Bereiche von 1 bis 12553, 27449, 43051 bestimmt, in denen 1500, 3000, 4500 Primzahlen auftreten. Zur Prüfung der asymptotischen Formel (98′) sollen diese Werte mit den Näherungswerten verglichen werden, die aus den Formeln des vorhergehenden Paragraphen hervorgehen.

Um die Formel (208) anzuwenden, hat man erstens für die Folgen $(0,2), (0,4), \ldots, (0,14)$ die Erweiterungen vorzunehmen; es genügt, wenn man sich dabei auf die Folgen von Teilsummen beschränkt, die zu beständigen Differenzenfolgen gehören. Zweitens sind für die zugehörigen H-Funktionen die Wachstumsfunktionen und die Schwankungsfunktionen aufzustellen, und man hat daraus die Näherungswerte der H-Funktionen für $n_2 - n_1 = n = 12553$, 27449, 43051 zu berechnen. Drittens müssen die Näherungswerte in die Gleichung (208), angewandt auf die Funktionen $U(0,2), \ldots, U(0,14)$, eingesetzt werden.

Die beständigen-Folgen, auf die man geführt wird, sind in der Tafel 22 angegeben; man hat für

$$k = 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4$$

als Anzahl der Folgen 7, 15, 14, 4.

Mithin kommen nur die Wachstumsfunktionen

$$A_k \cdot \frac{(\pi(n))^{k+1}}{n^k}$$

in Betracht, bei denen $k = 1, 2, 3, 4$ ist; man hat (vgl. § 21)

$$A_1 = 1{,}320; \quad A_2 = 2{,}859; \quad A_3 = 4{,}153; \quad A_4 = 10{,}140.$$

Darauf sind für

TAFEL 22

Schwankungsfunktionen für die beständigen Folgen bis zum Gewicht 14

$(2\sigma_\varkappa)$	$(2\delta_\varkappa)$	$z(3)$	$M(3)$	$z(5)$	$M(5)$	$z(7)$	$M(7)$	$S(2\sigma_\varkappa)$
				$k = 1$				
0, 2	2							1
0, 4	4							1
0, 6	6	0	2					2
0, 8	8							1
0, 10	10			0	4/3			4/3
0, 12	12	0	2					2
0, 14	14					0	6/5	6/5
				$k = 2$				
0, 2, 6	2, 4	1	1					1
8	2, 6	1	1					1
12	2, 10	1	1	1	3/2			3/2
14	2, 12	1	1			1	5/4	5/4
0, 4, 6	4, 2	1	1					1
10	4, 6	1	1	1	3/2			3/2
12	4, 8	1	1					1
0, 6, 8	6, 2	1	1					1
10	6, 4	1	1	1	3/2			3/2
12	6, 6	0	2					2
14	6, 8	1	1			1	5/4	5/4
0, 8, 12	8, 4	1	1					1
14	8, 6	1	1			1	5/4	5/4
0, 10, 12	10, 2	1	1	1	3/2			3/2
0, 12, 14	12, 2	1	1			1	5/4	5/4
				$k = 3$				
0, 2, 6, 8	2, 4, 2	1	1					1
12	2, 4, 6	1	1	2	2/1			2
14	2, 4, 8	1	1			2	4/3	4/3
0, 2, 8, 12	2, 6, 4	1	1	2	2/1			2
14	2, 6, 6	1	1			2	4/3	4/3
0, 2, 12, 14	2, 10, 2	1	1	2	2/1	2	4/3	8/3
0, 4, 6, 10	4, 2, 4	1	1	2	2/1			2
12	4, 2, 6	1	1					1
10, 12	4, 6, 2	1	1	2	2/1			2
0, 6, 8, 12	6, 2, 4	1	1					1
14	6, 2, 6	1	1			2	4/3	4/3
10, 12	6, 4, 2	1	1	2	2/1			2
12, 14	6, 6, 2	1	1			2	4/3	4/3
0, 8, 12, 14	8, 4, 2	1	1			2	4/3	4/3
				$k = 4$				
0, 2, 6, 8, 12	2, 4, 2, 4	1	1	3	1			1
12, 14	2, 4, 6, 2	1	1	3	1	3	3/2	3/2
8, 12, 14	2, 6, 4, 2	1	1	3	1	3	3/2	3/2
0, 4, 6, 10, 12	4, 2, 4, 2	1	1	3	1			1

TAFEL 23

Näherungswerte von H-Funktionen bis zum Gewicht 14

$(2\sigma_\varkappa)$	$(2\delta_\varkappa)$	12 553	27 449	43 051
Gewicht 2				
0, 2	2	237	433	621
Gewicht 4				
0, 4	4	237	433	621
Gewicht 6				
0, 6	6	473	866	1242
0, 2, 6	2, 4	61	102	141
0, 4, 6	4, 2	61	102	141
Gewicht 8				
0, 8	8	237	433	621
0, 2, 8	2, 6	61	102	141
0, 6, 8	6, 2	61	102	141
0, 2, 6, 8	2, 4, 2	11	16	21
Gewicht 10				
0, 10	10	316	577	828
0, 4, 10	4, 6	92	154	211
0, 6, 10	6, 4	92	154	211
0, 4, 6, 10	4, 2, 4	21	33	43
Gewicht 12				
0, 12	12	473	866	1242
0, 2, 12	2, 10	92	154	211
0, 4, 12	4, 8	61	102	141
0, 6, 12	6, 6	122	205	281
0, 8, 12	8, 4	61	102	141
0, 10, 12	10, 2	92	154	211
0, 2, 6, 12	2, 4, 6	21	33	43
0, 2, 8, 12	2, 6, 4	21	33	43
0, 4, 6, 12	4, 2, 6	11	16	21
0, 4, 10, 12	4, 6, 2	21	33	43
0, 6, 8, 12	6, 2, 4	11	16	21
0, 6, 10, 12	6, 4, 2	21	33	43
0, 2, 6, 8, 12	2, 4, 2, 4	3	4	5
0, 4, 6, 10, 12	4, 2, 4, 2	3	4	5
Gewicht 14				
0, 14	14	284	520	745
0, 2, 14	2, 12	77	128	176
0, 6, 14	6, 8	77	128	176
0, 8, 14	8, 6	77	128	176
0, 12, 14	12, 2	77	128	176
0, 2, 6, 14	2, 4, 8	14	22	28
0, 2, 8, 14	2, 6, 6	14	22	28
0, 2, 12, 14	2, 10, 2	28	43	57
0, 6, 8, 14	6, 2, 6	14	22	28
0, 6, 12, 14	6, 6, 2	14	22	28
0, 8, 12, 14	8, 4, 2	14	22	28
0, 2, 6, 12, 14	2, 4, 6, 2	5	7	8
0, 2, 8, 12, 14	2, 6, 4, 2	5	7	8

$$n = 12553,\ 27449,\ 43051$$

und $$\pi(n) = 1500,\ 3000,\ 4500$$

die Werte der Wachstumsfunktionen zu ermitteln. Man findet

k	12 553	27 449	43 051
1	236,7	432,9	621,1
2	61,2	102,5	140,6
3	10,6	16,3	21,3
4	3,1	4,3	5,4

Die Schwankungsfunktionen sind aus den Multiplikatoren erster und zweiter Art zusammengesetzt:

$$S(2\sigma_\varkappa) = \Pi M_1(p') \cdot \Pi M_2(p''), \tag{181}$$

und zwar ist

$$M_1(p') = p' - z(p') - 1 \qquad (p' \leqq k+1), \tag{182'}$$

$$M_2(p'') = \frac{p'' - z(p'') - 1}{p'' - k - 1} \qquad (k+1 < p \leqq \sigma_k). \tag{183'}$$

Im vorliegenden Fall ist $k \leqq 4$, mithin können nur die Primzahlen $3, 5, 7$ wirksam sein. In der Tafel 22 sind die Multiplikatoren und die Schwankungsfunktionen angegeben.

Aus den Wachstumsfunktionen und den Schwankungsfunktionen ergeben sich die Näherungswerte der H-Funktionen für $n_2 - n_1 = n$, wenn für n die drei angegebenen Werte genommen werden. Sie sind aus der Tafel 23 ersichtlich, die nach Gewichten und innerhalb der Gewichte nach der Gliederzahl geordnet ist.

Mit Hilfe der Näherungswerte der H-Funktionen sind endlich nach der Formel (208) die Näherungswerte der Funktionen $U(0, 2), \ldots, U(0, 14)$ berechnet worden. In der Tafel 24 findet man noch zur Vergleichung die Näherungswerte der H-Funktionen. Die Übereinstimmung der berechneten Werte mit den wahren Werten ist überraschend.

TAFEL 24

Vergleichung der wahren Werte U_w und der berechneten Werte U_b von U-Funktionen

2δ	$n = 12\,553$				$n = 27\,449$				$n = 43\,051$			
	U_w	U_b	Diff.	H_b	U_w	U_b	Diff.	H_b	U_w	U_b	Diff.	H_b
2	244	237	+ 7	237	437	433	+ 4	433	625	621	+ 4	621
4	242	237	+ 5	237	437	433	+ 4	433	617	621	− 4	621
6	356	351	+ 5	473	673	661	+ 12	866	986	961	+ 25	1242
8	128	125	+ 3	237	244	244	± 0	435	370	361	+ 9	821
10	141	153	− 12	316	274	302	− 28	577	424	447	− 23	828
12	133	145	− 12	473	303	303	± 0	866	462	461	+ 1	1242
14	63	68	− 5	284	147	146	+ 1	516	210	225	− 15	745

§ 28
Neue Aufgaben der Primzahlforschung

Auf das der Vergessenheit anheimfallende Verfahren des ERATOSTHENES, die Primzahlen auszusieben, hat HORSLEY im Jahre 1772 wieder die Aufmerksamkeit gelenkt[1]. Bald darauf, 1776, machte HINDENBURG in seiner ersten mathematischen Veröffentlichung Vorschläge, wie man solche Siebungen möglichst bequem und sicher ausführen könne[2]. Seine „Zahlenbogen", die schon in LAMBERTS Deutschem Briefwechsel (Berlin 1785) bei Gelegenheit der FELKELschen Faktorentafeln wiederholt erwähnt worden waren, sind dann von BURCKHRADT (1814–1817) zur Herstellung der bekannten Tafeln benutzt worden, die für die Zahlen der drei ersten Millionen jeweils den kleinsten Teiler angeben[3]. Auch

[1] S. HORSLEY, On the Sieve of ERATOSTHENES; being an account of his method of finding all the prime numbers, Phil. Trans. 62, London 1772, S. 237; vgl. A. DE POLIGNAC, Notice historique sur le crible d'ERATOSTHÈNES, Nouv. ann. de math. (1) 12 (1853), S. 429.

[2] K. F. HINDENBURG, Beschreibung einer ganz neuen Art, nach einem bekannten Gesetz folgende Zahlen durch Abzählen oder Abmessen bequem und sicher zu finden, Leipzig 1776; vgl. M. CANTOR, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bd. IV, Artikel Kombinatorik von E. NETTO, S. 202.

[3] J. K. BURCKHRADT, Tables des diviseurs pour tous les nombres du deuxième million, Paris 1814, troisième million, 1816, premier million 1817.

die späteren Ausdehnungen bis zur zehnten Million, die man DASE[1] und GLAISHER[2] verdankt, beruhen auf geschickter Siebung. Neuerdings hat LEHMER eine verbesserte Tafel der ersten zehn Millionen herausgegeben und ihr eine handliche Liste der Primzahlen von 1 bis 1006721 folgen lassen[3].

Aus diesen umfangreichen Tafelwerken hat man bis jetzt wenig Nutzen für die Erkenntnis des feineren Baues der Primzahlreihe gezogen. Von größeren Untersuchungen, die mit ihrer Hilfe angestellt worden sind, ist wohl nur die Abzählung der Primzahlzwillinge durch GLAISHER zu benennen[4]. Es hätte, sollte man meinen, nahe gelegen, ähnliche Abzählungen für die Primzahlpaare der Differenzen $4, 6, 8, \ldots$ vorzunehmen. Was davon abgeschreckt hat, ist gewiß nicht die Mühe der Arbeit gewesen, denn an unermüdlichen Rechnern hat es nie gefehlt. Entmutigend war vielmehr, daß man nicht voraussehen konnte, ob einfache Gesetzmäßigkeiten, sei es in den Anzahlen solcher Paare selbst, sei es zwischen ihnen, zu Tage treten würden. Man wird jene Erscheinung also wohl daraus zu erklären haben, daß es an fruchtbaren Fragestellungen fehlte; um Versuche anzustellen, muß man auch in der Mathematik erst die Gedanken haben.

Die in der vorliegenden Abhandlung entwickelten asymptotischen Gesetze stellen der numerischen Primzahlforschung eine Fülle neuer Aufgaben. Der Begriff der Lückenzahlen war zwar, dem Wesen nach, schon früher gelegentlich aufgetreten, man war jedoch nicht über die ersten, naheliegenden Eigenschaften hinausgekommen[5]. Durchaus neu aber war erstens der Ge-

[1] Z. DASE, Faktorentafel für alle Zahlen der 7., 8., 9. Million, Hamburg, 1862—1865.

[2] J. GLAISHER, Factor table for the fourth, fifth, sixth million, London 1879—1883.

[3] D. N. LEHMER, Factor table for the first ten millions, Washington 1909, List of the prime numbers from 1 to 10006721, Washington 1914.

[4] J. GLAISHER, An enumeration of prime pairs, Messenger of math. (2) 8 (1878), S. 33.

[5] Außer LEGENDRE (1808) und DUPRÉ (1859), die schon in § 1 (Teil I, S. 8) erwähnt wurden, ist noch A. DE POLIGNAC zu nennen. Seine zahlreichen Noten findet man in LANDAUS Literaturverzeichnis (Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Leipzig 1909, Bd. II, S. 640); es genüge daher, die zusammenfassende Darstellung anzuführen, die POLIGNAC unter dem Titel: Nouvelles recherches sur les nombres premiers im Journ. de math. (1) 19 (1854), S. 305 gegeben hat. Seine séries diatomiques sind nichts

danke, Probleme im Gebiete der Primzahlen auf das Gebiet der Lückenzahlen zu übertragen und die hier gewonnenen asymptotischen Lösungen, die sich in aller Strenge herleiten lassen, durch Multiplikation mit einer geeigneten Potenz der Dichtigkeit, die den Primzahlen im Hauptabschnitt der Lückenzahlen zukommt, auf die Primzahlen zu übertragen. Durchaus neu war zweitens der Begriff der beständigen Folgen von Differenzen, an den sich sofort die Aufgabe knüpft, die Darstellungen der ganzen Zahlen als mehrfache Summen mittels Primzahlfolgen, die gegebene Differenzenfolgen aufweisen, zu untersuchen.

Die Bearbeitung des weiten Feldes, das sich jetzt der numerischen Primzahlforschung bietet, ist sogleich von WEINREICH in Angriff genommen worden. Über einen Teil seiner Ergebnisse konnte schon an dieser Stelle berichtet werden; weitere im Gange befindliche Untersuchungen sollen den Gegenstand späterer Mitteilungen bilden. Allein die Kraft eines Einzelnen ist unzureichend gegenüber so umfangreichen Aufgaben. Die Aufforderung mitzuhelfen, birgt allerdings eine Gefahr in sich. „Mehr als irgendwo", sagt MEHMKE[1], „scheint auf diesem Gebiete [des numerischen Rechnens] durch Wiederholung schon getaner Arbeit Zeit und Kraft verschwendet worden zu sein." Damit solche Vergeudung vermieden werde, wäre eine gegenseitige Verständigung erwünscht, ja man könnte an eine von einer Zentralstelle aus zu leitende Organisation der Primzahlforschung denken.

Wenn, wie zu erwarten ist, auch die weiteren numerischen Prüfungen die in der vorliegenden Abhandlung aufgestellten Formeln bestätigen, dann wird, wie es sich in der Zahlentheorie wiederholt ereignet hat, auch die Zeit kommen, wo die durch Intuition gewonnenen, durch Induktion sichergestellten Formeln ihren strengen Beweis erhalten.

---

anderes als die Folgen der jeweils um eine Einheit verminderten Urdifferenzen der Lückenzahlen; sie geben also an, wieviel unmittelbar aufeinanderfolgende Glieder der Reihe der natürlichen Zahlen bei dem Siebungsverfahren mit $2, 3, \ldots, p_r$ gestrichen worden sind.

[1] R. MEHMKE, Numerisches Rechnen, Enzyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. I, Teil 2, Leipzig 1904, S. 951.